Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

04/05/98 ***Zeros de uma função polinomial*** **10.º Ano**

Nome: ____ N.º:____ Turma: ___

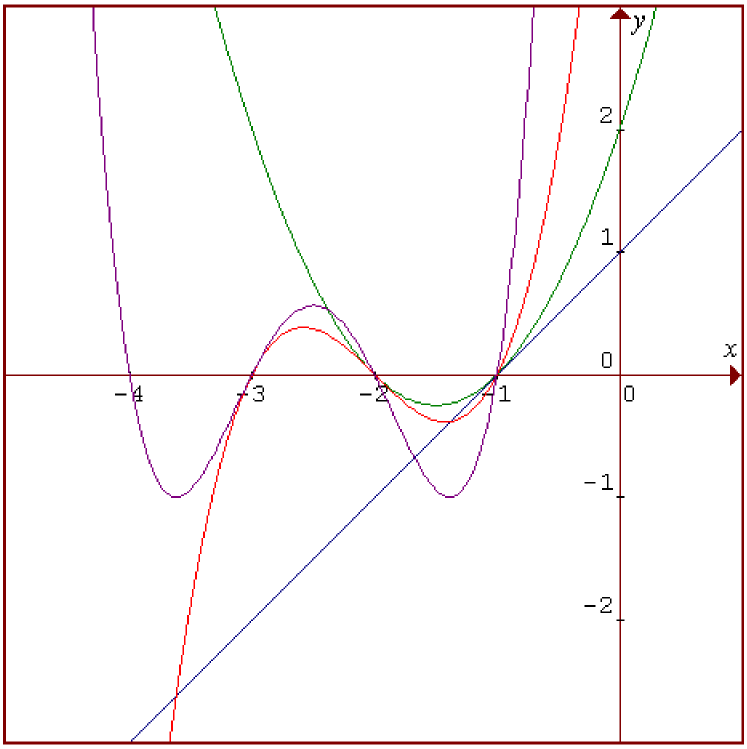
1. Considera as funções reais de variável real, assim definidas:

$f_1(x) = x + 1$

$f_2(x) = (x+1)(x+2)$

$f_3(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$

$f_4(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$



a) Utiliza a calculadora gráfica e analisa os gráficos das funções.

b) Escreve $f_2(x)$, $f_3(x)$ e $f_4(x)$ na forma de polinómio reduzido, introduz as expressões na calculadora e compara os gráficos com os que obtiveste na alínea a).

c) Em relação a cada uma daquelas funções, haverá funções definidas por outras expressões polinomiais do mesmo grau que *cortem* o eixo dos xx nos mesmos pontos?

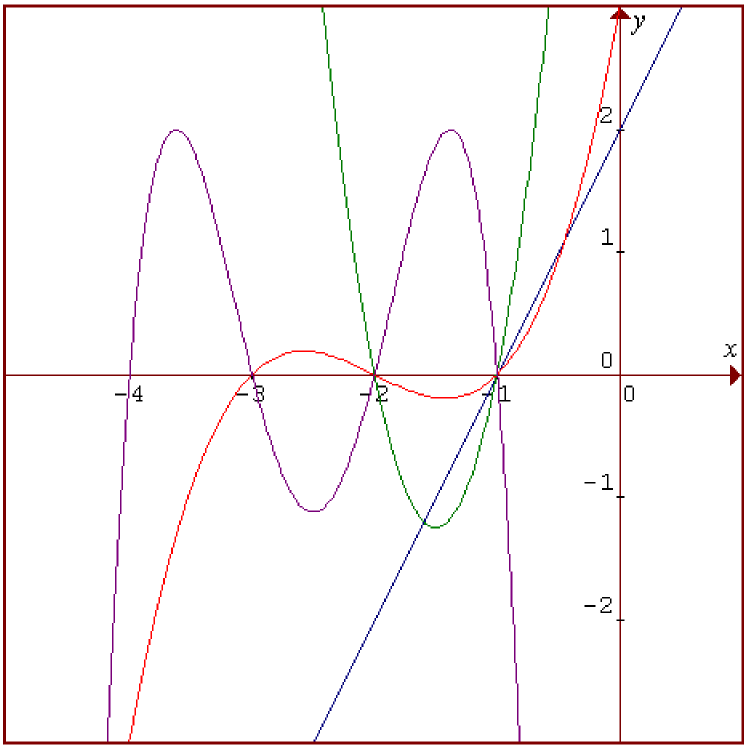
2. Dadas as funções:

$g_1(x) = 2(x+1)$

$g_2(x) = 5(x+1)(x+2)$

$g_3(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x+2)(x+3)$

$g_4(x) = -2(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$



a) Compara os gráficos de g_1 com f_1, de g_2 com f_2, de g_3 com f_3 e de g_4 com f_4 e diz como podem ser obtidos os gráficos das funções g_1, g_2, g_3 e g_4 a partir dos de f_1, f_2, f_3 e f_4, respectivamente.
Qual te parece ser a influência dos coeficientes?

b) Haverá funções definidas por expressões polinomiais de graus diferentes que *cortem* ou *toquem* no eixo dos xx nos mesmos pontos, respectivamente, e só nestes?

3. Considera as funções reais de variável real, assim definidas:

$h_1(x) = (x+1)^2$

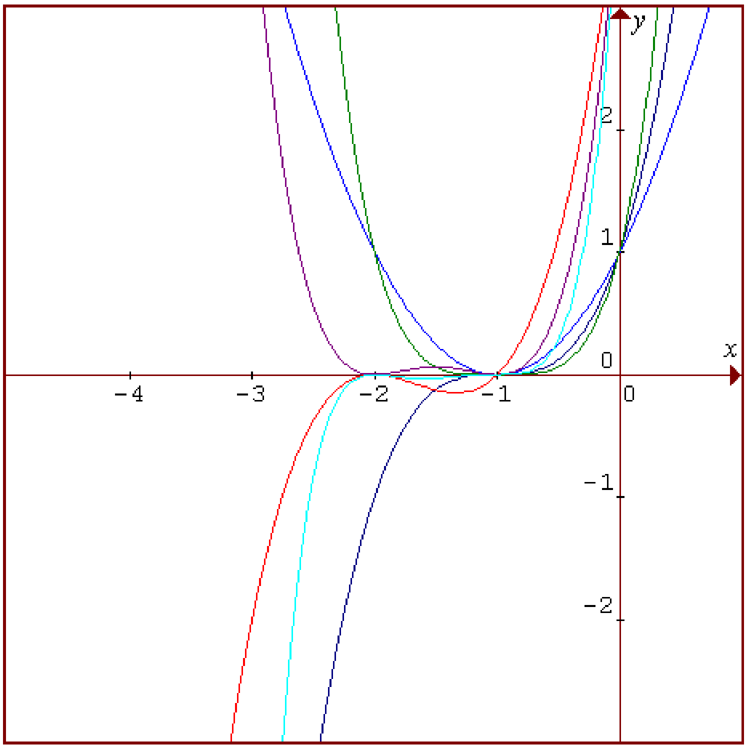
$h_2(x) = (x+1)^3$

$h_3(x) = (x+1)^4$

$h_4(x) = (x+1)(x+2)^2$

$h_5(x) = (x+1)^2(x+2)^2$

$h_6(x) = (x+1)^3(x+2)^2$



a) Utiliza a calculadora gráfica para construir os gráficos das funções.

b) Escreve $h_1(x)$, $h_2(x)$ e $h_3(x)$ na forma de polinómios reduzidos e indica o respectivo grau.
Quais os zeros destas funções? E os de h_4, h_5 e h_6?

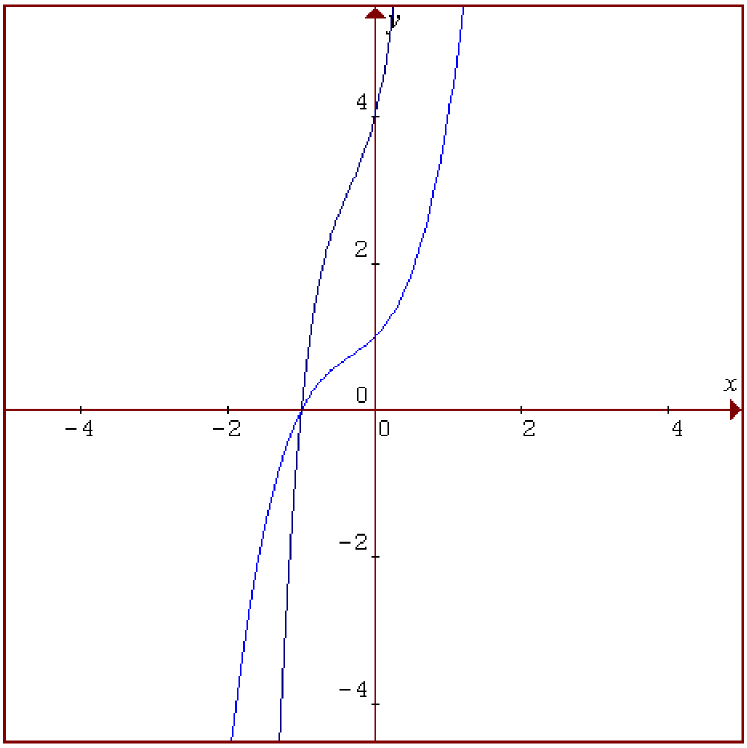
c) Estuda o sinal das funções para valores muito próximos de –1, à esquerda e à direita, e relaciona-o com o expoente do factor $x+1$.

d) Haverá funções definidas por expressões polinomiais de graus diferentes que *cortem* ou *toquem* o eixo dos xx nos mesmos pontos e só nesses?

4. Considera as funções reais de variável real, assim definidas:

$t_1(x) = (x+1)(x^2+1)$

$t_2(x) = (x+1)(x^2+1)(x^2+4)$



a) Utiliza a calculadora gráfica e representa t_1 e t_2.

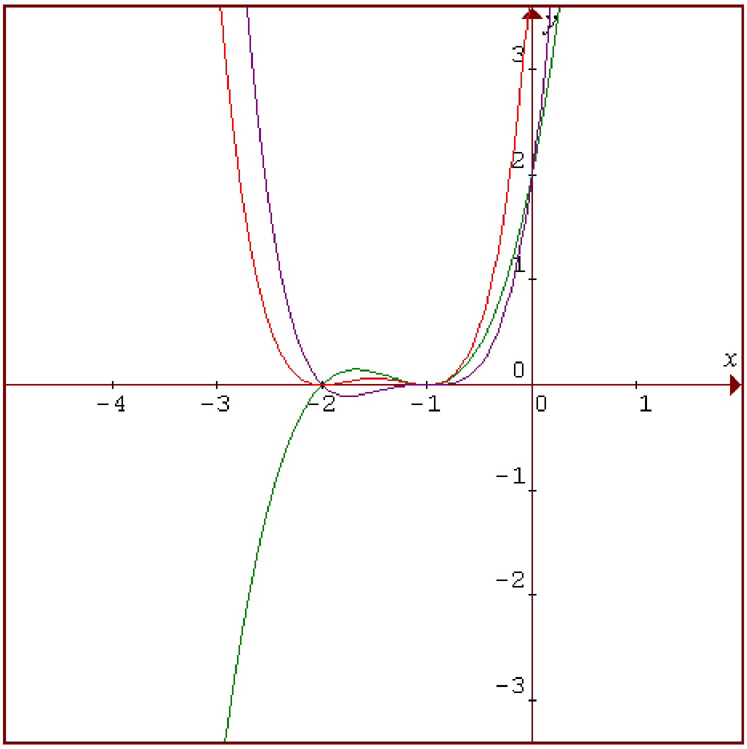
b) O que têm de comum os factores x^2+1 e x^2+4?
Haverá polinómios de grau diferente que apresentem a mesma característica?

5. Considera as funções reais de variável real, assim definidas:

$$s_1(x) = (x+1)^2(x+2)$$

$$s_2(x) = (x+1)^2(x+2)^2$$

$$s_3(x) = (x+1)^3(x+2)$$



a) Utiliza a calculadora gráfica para representar graficamente as funções.

b) Observa atentamente os gráficos obtidos e tenta detectar regularidades existentes.

6. Comenta cada uma das seguintes afirmações:

a) *Dados dois números reais, há pelo menos uma função que os admite como zeros.*

b) *Conhecer o número de zeros reais de uma função polinomial permite-nos escrever um polinómio com o menor grau possível que pode definir a função.*

c) *Dados dois números reais, há polinómios de qualquer grau superior a 2 que os admitem como únicos zeros reais.*

3. Considera as funções reais de variável real, assim definidas:

f: $x \to x^3$

g: $x \to 4x$

h: $x \to x^3 - 4x$

a) Representa a função *f* no rectângulo de visualização [-3, 3] por [-8, 8].

b) Representa agora, simultaneamente, os gráficos das funções *f* e *g*.

c) Completa a tabela seguinte:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27		-1				
$g(x)$					4		12
$h(x)$	-15			0			

d) Usando os valores da tabela, representa no referencial ao lado alguns dos pontos do gráfico da função *h*.

e) Como será o gráfico de *h*?
Como se poderá obter o gráfico de *h* à custa dos gráficos de *f* e *g*?
Esboça o que *pensas* ser o gráfico de *h*.

f) Representa agora, simultaneamente, os gráficos das três funções e confirma, ou rectifica, as tuas respostas anteriores.

Generalizando, sendo f e g duas funções polinomiais quaisquer, define-se a ***função diferença****, $f-g$, do seguinte modo:*

$$f-g: \; IR \to IR$$
$$x \to (f-g)(x) = f(x) + (-g(x)) = f(x) - g(x)$$

4. Considera as funções reais de variável real, assim definidas:

f: $x \to x+4$

g: $x \to -x+2$

h: $x \to f(x) \times g(x)$

a) Representa, simultaneamente, os gráficos das funções *f* e *g*, no rectângulo de visualização [-6, 6] por [-10, 10].

b) Completa a tabela seguinte:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$		0		2					7
$g(x)$	-7				-3		1		
$h(x)$			5					0	

c) Como se poderá obter o gráfico de *h* à custa dos gráficos de *f* e *g*? Esboça o que *pensas* ser o gráfico de *h*.

d) Determina uma expressão analítica da função quadrática *h* e confirma com a calculadora gráfica o gráfico que esboçaste.

*Define-se $f \times g$, **função produto** das funções polinomiais f e g , do seguinte modo:*

$$f \times g: \ IR \to IR$$
$$x \to (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

5. A partir dos gráficos de *h* e de *j*:

a) Esboça o gráfico da função $h+j$.

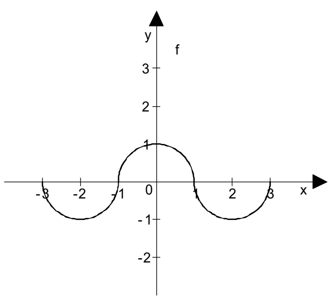
b) Esboça o gráfico da função $h-j$.

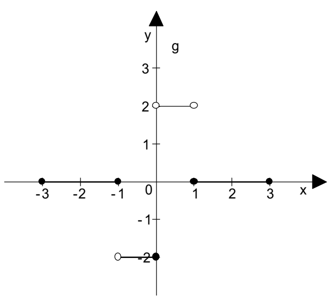
c) Esboça o gráfico da função $h \times j$.

NOTA: Esboça, a cores diferentes,
os diversos gráficos no referencial dado.

d) Determina uma definição analítica para as funções *h*, *j*, $h+j$, $h-j$ e $h \times j$.

6. Considera as funções reais de variável real *f* e *g* a seguir representadas.





Faz um esboço gráfico de cada uma das funções:

a) $g(|x|)$.

b) $(f+g)(x)$

c) $(f \times g)(x)$

7. Considera as funções reais de variável real f e g, de domínio [-6, 8], a seguir representadas.

NOTA: O arco desenhado é um arco de parábola.

a) Esboça no referencial ao lado o gráfico da função $f + g$.

b) Esboça no referencial ao lado o gráfico da função $f \times g$.

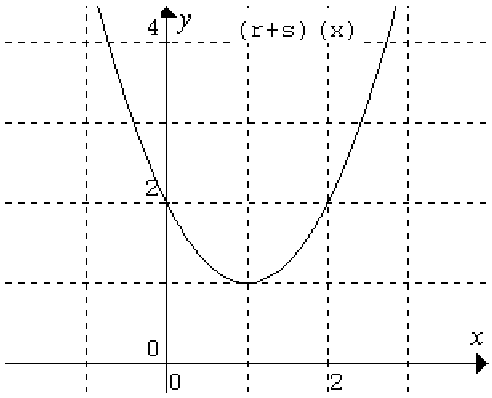
c) Define analiticamente a função $f + g$.

d) Define analiticamente a função $f \times g$.

e) Tendo em consideração os resultados das alíneas anteriores, determina $\alpha \in IR$, tal que $(f+g)(\alpha) = (f \times g)(\alpha)$.

SOLUÇÕES

2.

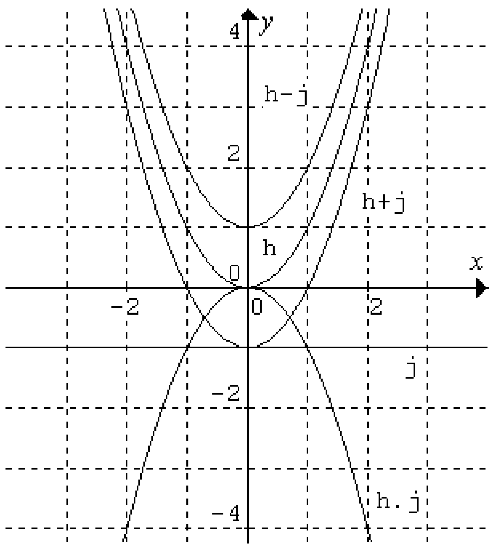


a)

b) $r(x) = 1$; $s(x) = (x-1)^2$;

$(r+s)(x) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$

5.

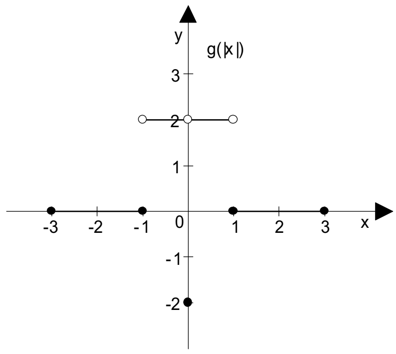


d) $h(x) = x^2$; $j(x) = -1$;

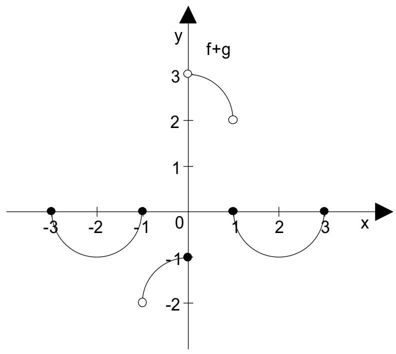
$(h+j)(x) = x^2 - 1$; $(h-j)(x) = x^2 + 1$;

$(h \times j)(x) = -x^2$.

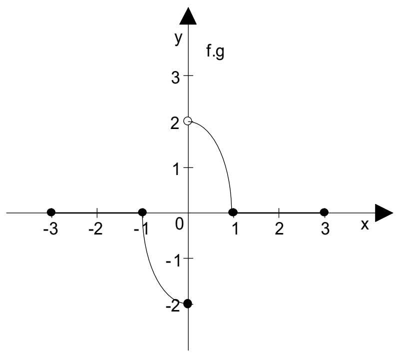
6.



a)



b)



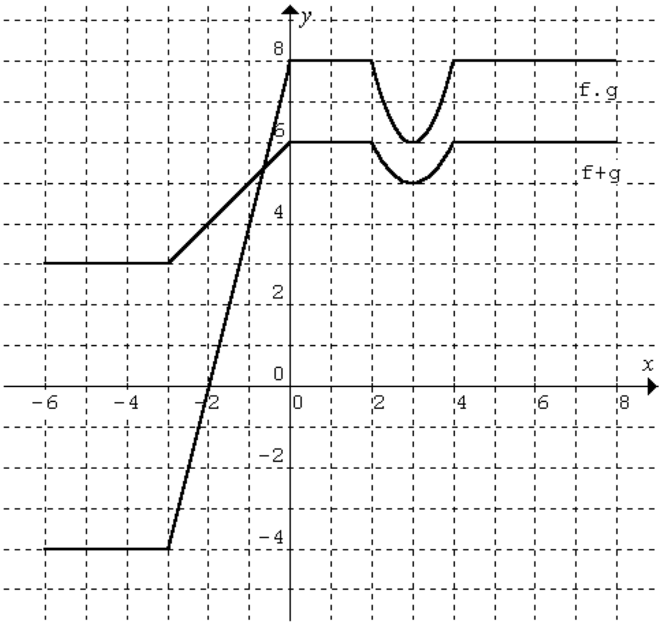
c)

7.

c) $(f+g)(x)=\begin{cases} 3 & \Leftarrow & -6 \le x < -3 \\ x+6 & \Leftarrow & -3 \le x < 0 \\ 6 & \Leftarrow & 0 \le x < 2 \\ (x-3)^2+5 & \Leftarrow & 2 \le x < 4 \\ 6 & \Leftarrow & 4 \le x \le 8 \end{cases}$

d) $(f \times g)(x)=\begin{cases} -4 & \Leftarrow & -6 \le x < -3 \\ 4x+8 & \Leftarrow & -3 \le x < 0 \\ 8 & \Leftarrow & 0 \le x < 2 \\ 2(x-3)^2+6 & \Leftarrow & 2 \le x < 4 \\ 8 & \Leftarrow & 4 \le x \le 8 \end{cases}$

e) $\alpha = -\dfrac{2}{3}$



O Professor