Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

20/04/98 ***Função quadrática; inequações do 2.º grau*** **10.º Ano**

Nome: ____ N.º:____ Turma: ___

1. Qual o rectângulo de maior área que podes construir com um cordel de 1 metro?
A resolução pode-se processar por etapas:

a) Constrói uma tabela em que figurem, para algumas dimensões possíveis do rectângulo, as correspondentes áreas.

Comprimento	5		15	20	25		35		45
Largura	45	40		30	25	20		10	
Área		400	525			600	525	400	225

b) Faz uma representação gráfica com papel e lápis.

c) Traduz o problema por uma expressão analítica.

d) Introduz na calculadora gráfica a expressão analítica da função e obtém o seu gráfico.

e) Recorre, por exemplo, ao máximo da função ou às coordenadas do vértice da parábola para confirmar o resultado sugerido pela tabela: *o quadrado é o rectângulo de área máxima*.

2. Uma bola é lançada verticalmente com uma velocidade inicial de 32 m/s.
As funções $h(t) = -4{,}9t^2 + 32t + 2{,}1$ e $v(t) = -9{,}8t + 32$ podem ser utilizadas para prever respectivamente a altura da bola e a velocidade em cada instante.

a) Usando as possibilidades que a calculadora gráfica oferece, preenche a tabela seguinte:

Tempo (*s*)	0	1	2	3	4	5	6	7
Altura (*m*)								
Velocidade (*m/s*)								

b) Utilizando uma calculadora gráfica, representa graficamente as duas funções.

c) Qual é a altura máxima que a bola atinge? Em que instante? Qual é a velocidade nesse momento? Que valores toma a velocidade antes desse momento? E depois?

d) Qual é o domínio de cada uma das funções? E o contradomínio?

e) Qual é a velocidade da bola no momento em que chega ao solo? Como a determinas?

f) O gráfico da função que relaciona o tempo com a altura da bola é um gráfico simétrico. Assinala o eixo de simetria. Que implicações ou significado tem esta simetria no problema da realidade que estás a estudar?

3. Considera a função $y = (x-1)(x+5)$.

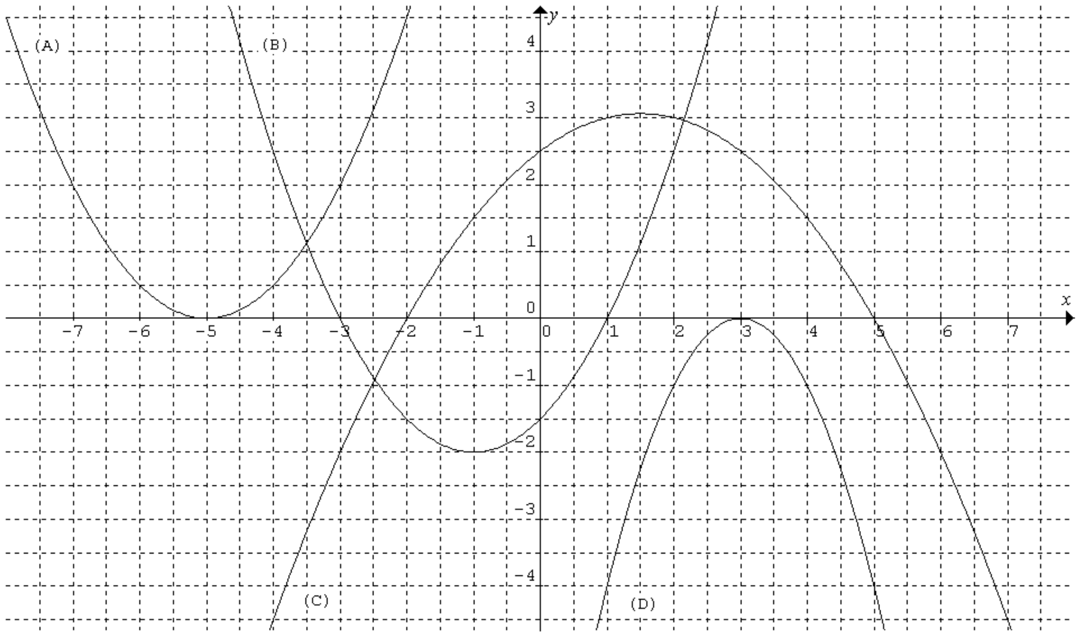
a) Representa graficamente a função.

b) Observa o gráfico. Qual o significado de 1 e -5 relativamente ao gráfico.

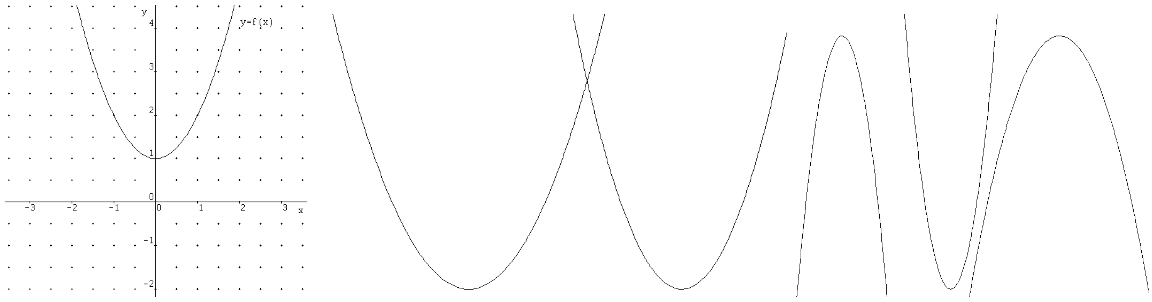
c) Investiga os gráficos das funções da família $y = (x-a)(x-b)$. Atribui vários valores, positivos, negativos e zero a *a* e a *b*; experimenta também o caso em que *a*=*b*.

d) Qual é o significado de *a* e *b* relativamente ao gráfico?

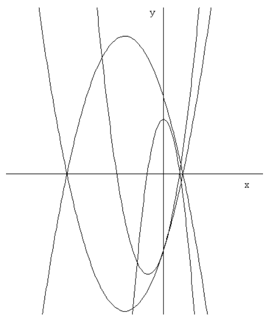
e) Define, através das suas expressões analíticas, funções que correspondam aos seguintes gráficos. Testa as expressões que encontraste com a calculadora gráfica.



4. Dado o gráfico de $y = f(x)$, obtém o gráfico de $y = f(2x) - 3$ seleccionando uma das cinco curvas e colocando-a no sistema coordenado.



5. Os gráficos de quatro funções quadráticas são mostrados a seguir. Identifica cada um deles com as funções definidas pelas expressões da lista dada.



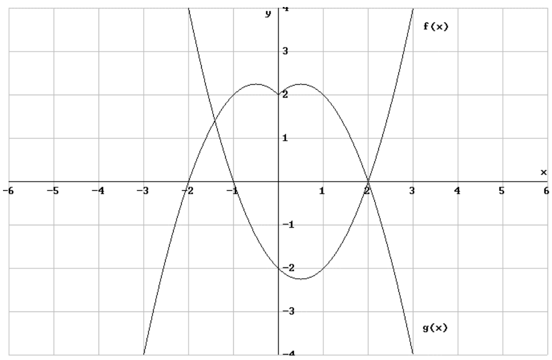
$f(x) = 0{,}4x^2 + 3x - 7$

$g(x) = -0{,}4x^2 - 3x + 7$

$h(x) = x^2 + 3x - 7$

$i(x) = -2x^2 + 5$

6. Considera as funções *f* e *g*, reais de variável real, representadas no gráfico ao lado.
Então a função *g* é definida por:



[A] $g(x) = |f(x)|$;

[B] $g(x) = f(|x|)$;

[C] $g(x) = -f(|x|)$;

[D] $g(x) = -|f(x)|$.

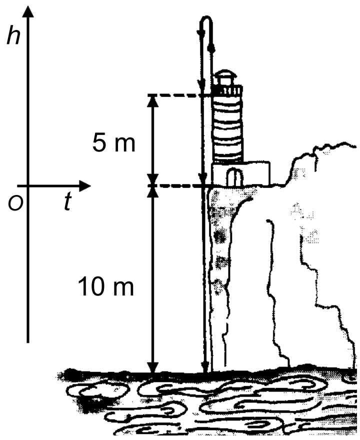
7. Lança-se uma flecha para o céu, num instante que se toma para origem dos tempos. Durante o movimento a altitude $d(t)$ da flecha no instante *t* é dada por $d(t) = -5t^2 + 20t + 2$. Esta altitude é medida a partir do solo. As unidades utilizadas são segundos para o tempo e metros para a altitude.

a) Depois de esboçar o gráfico, responde:

a1) A flecha atingirá uma altura de 14,8 metros? A flecha atingirá uma altura de 27 metros?

a2) Qual a altura máxima que a flecha atingirá? Em que instante?

b) Comprova os valores indicados em a2), depois de escrever $d(t)$ na forma $d(t) = a(t-h)^2 + k$.



8. Do alto de um farol lança-se verticalmente, de baixo para cima, um projéctil cuja altura *h* em relação à base do farol é dada por

$$h(t) = 5 + 4t - t^2 \qquad (h \text{ em metros; } t \text{ em segundos})$$

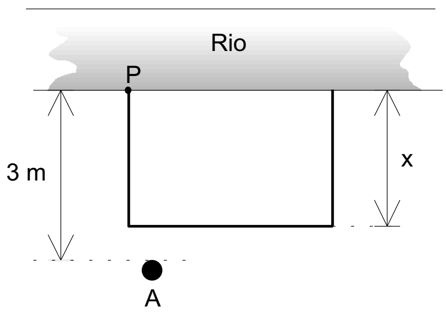
a) Mostra que $h(t) = -(t-2)^2 + 9$.

b) Depois de determinar o vértice, zeros e eixo de simetria, esboça o gráfico de $t \to h(t)$, para $t \geq 0$.

c) Determina, com aproximação à décima de segundo, ao fim de quanto tempo o projéctil atinge as águas do mar. (Observa a figura).

d) Sem recorrer ao gráfico, determina durante quanto tempo esteve o projéctil a uma altura superior ou igual a 8 metros em relação à base do farol.

9. Dispõe-se de 12 metros de rede, que se pretendem utilizar **na totalidade**, para vedar um terreno rectangular à beira de um rio (só três lados a vedar), construído a partir do ponto P. (*Observa a figura*).

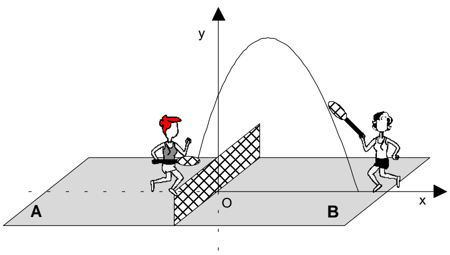


a) Mostra que a expressão $a(x) = 12x - 2x^2$ (*x* em metros e *a* em metros quadrados) representa a medida da área do terreno vedado em função do comprimento do lado marcado na figura.

b) Depois de determinar o vértice, zeros e eixo de simetria, esboça o gráfico de $a(x)$ (em IR).

c) Determina as dimensões do terreno de modo que a área seja máxima. Esboça um esquema que traduza esta situação.

d) Pretende-se obter um terreno vedado com 16 m^2 de forma a que a árvore (**A**) não fique dentro do mesmo. Utilizando o gráfico, determina as dimensões do terreno a vedar e confirma algebricamente os resultados obtidos.



10. Num jogo de *badmington* o jogador A, situado a 2 m da rede, joga o «volante» a 1 m do chão. Este desloca-se num plano vertical e descreve uma trajectória que, no referencial ortonormado cujos eixos resultam da intersecção do plano onde se desloca o «volante» com o plano do chão (horizontal) e com o plano da rede (vertical) - ver figura -, tem por equação:

$$y = -\frac{1}{2}(x+2)(x-6)+1 \qquad \text{(a unidade considerada nos dois eixos é o metro)}$$

a) Quando o «volante» passa sobre a rede, a quantos metros está do chão?
Quando o «volante» atinge a altura máxima, a quantos metros da rede fica a vertical dessa posição?

b) Determina, com aproximação ao centímetro, a distância a que o «volante» está da rede quando se encontra sobre o campo do jogador B a 2 metros do chão.

11. Considera as funções quadráticas definidas como se segue:

$f(x) = x^2 - 6x + 8$; $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$; $h(x) = -x^2 + 2x - 5$

a) Determina os zeros e estuda o sinal da função *f*.

b) Representa graficamente a função *f*. Indica as coordenadas do vértice da parábola, o contradomínio e intervalos de monotonia da função.

c) Repete as alíneas anteriores para as restantes funções.

12. Resolve, em IR, as inequações:

a) $x^2 - 4 > 0$ **b)** $x^2 - 9 \leq 0$ **c)** $x^2 - 4x - 5 > 0$ **d)** $x^2 \geq 5$

e) $4x^2 + 3 \geq 0$ **f)** $x(x-2) < -3$ **g)** $(x-5)(3-x) \geq 0$ **h)** $3x^2 + x \geq -3$

13. Representa graficamente as funções reais de variável real assim definidas:

a) $f : x \to \left|x^2 - 4\right|$ **b)** $g : x \to \left|2x^2 + 4x\right|$ **c)** $h : x \to \left|-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right|$

d) $i : x \to \begin{cases} -x^2 & \Leftarrow \quad x \leq 1 \\ 2x - 2 & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$ **e)** $j : x \to \begin{cases} (x-3)^2 + 2 & \Leftarrow \quad x \leq 4 \\ -x + 3 & \Leftarrow \quad x > 4 \end{cases}$ **f)** $m : x \to \begin{cases} x^2 & \Leftarrow \quad x \leq 1 \\ -x^2 & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$

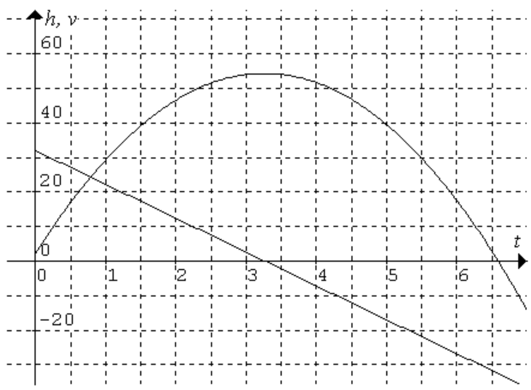
SOLUÇÕES

1.

c) $A = c \times (50 - c)$.

2.

b)



c) Com base nos gráficos e tabelas anteriores, a altura máxima da bola é de aproximadamente 54 m, atingida entre os 3 s e 4 s. ...

d) Para domínio das duas funções faz sentido considerar o tempo que decorre entre o lançamento da bola e a sua chegada ao chão. Antes e depois desse intervalo de tempo as funções consideradas não descrevem o movimento da bola.

e) A velocidade é calculada conhecendo o instante de chegada ao solo (extremo superior do domínio), e usando a fórmula ou o gráfico.

f) O tempo que a bola leva para chegar de uma determinada altura até à altura máxima é igual ao tempo que leva para descer desde a altura máxima até essa altura. Em particular, a bola é lançada à altura de 2,1 m e leva tanto tempo a subir como leva a descer até voltar à altura de 2,1 m.

3.

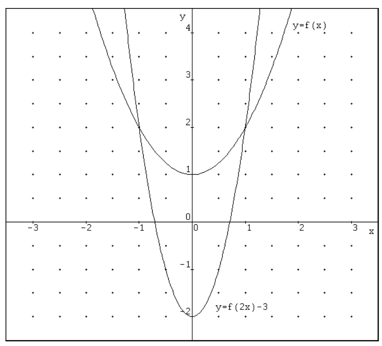
e) (A) $\frac{1}{2}(x+5)^2$;

(B) $\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$

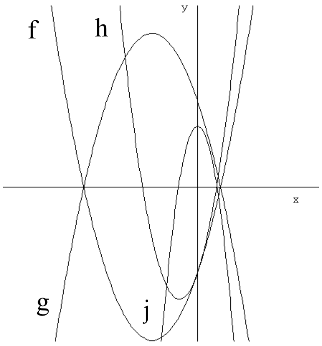
(C) $-\frac{1}{4}(x+2)(x-5)$

(D) $-(x-3)^2$.

4. Se considerarmos a função $y = f(2x)$ e a compararmos com $y = f(x)$ concluiremos que a 1.ª apresenta a mesma imagem da 2.ª para objectos que são metade dos considerados na 2.ª. Significa, portanto, que a primeira função apresenta um maior decrescimento/crescimento que a 2.ª. Desta forma, o gráfico de $y = f(2x)$ será a 4.ª curva a contar da esquerda, colocando-a no referencial com o vértice no ponto de coordenadas (0, 1).
Finalmente, o gráfico de $y = f(2x) - 3$ obtém-se deste por uma translação associada ao vector $\vec{u} = (0,\ -3)$.

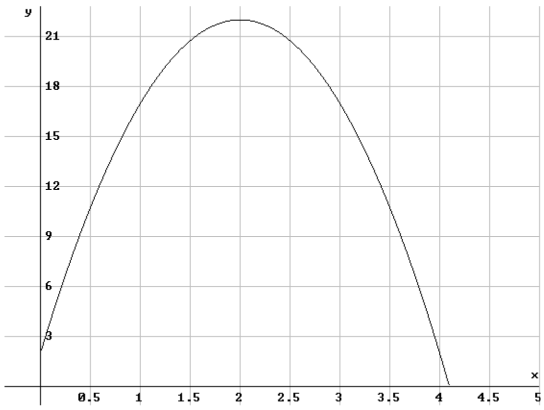


5. Basta ter em consideração o sentido da concavidade e o grau de crescimento e decrescimento.



6. Como g assume quer valores positivos quer valores negativos, então as respostas **A** e **D** são incorrectas.
Como as imagens de zero são de sinais contrários pelas funções f e g, então a resposta **B** também é incorrecta. Assim, sendo uma das respostas correcta, ela será a resposta **C**. (p. e.)

7.



a1) Sim, a flecha atingirá uma altura de 14,8 metros. Não, a flecha não atingirá uma altura de 27 metros.

a2) Cerca de dois segundos após o lançamento a flecha atingirá a altura máxima: aproximadamente 22 metros.

b) Sendo
$d(t) = -5t^2 + 20t + 2 = -5(t^2 - 4t + 4) + 22 = -5(t-2)^2 + 22$
confirma-se que a flecha atinge a altura máxima de 22 metros dois segundos após o lançamento.

8.

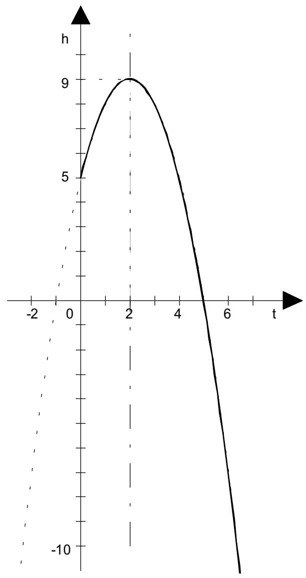
a)

$$\begin{aligned} h(t) &= 5 + 4t - t^2 \\ &= -(t^2 - 4t) + 5 \\ &= -(t-2)^2 + 4 + 5 \\ &= -(t-2)^2 + 9 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} h(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -(t-2)^2 + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (t-2)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow \quad t - 2 = -3 \ \vee \ t - 2 = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad t = -1 \ \vee \ t = 5 \end{aligned}$$

O vértice é $V \to (2,\ 9)$.
O eixo de simetria é a recta de equação $t = 2$.
Os zeros são: -1 e 5.



c) As águas do mar encontram-se 10 m abaixo da base do farol.
Assim,

$$\begin{aligned} h(t) = -10 \quad &\Leftrightarrow \quad -t^2 + 4t + 5 = -10 \\ &\Leftrightarrow \quad -t^2 + 4t + 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{-4 \mp \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times 15}}{-2} \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{2} \end{aligned}$$

Ora, $\dfrac{4 + \sqrt{76}}{2} = 6{,}4$ (1 c. d.).

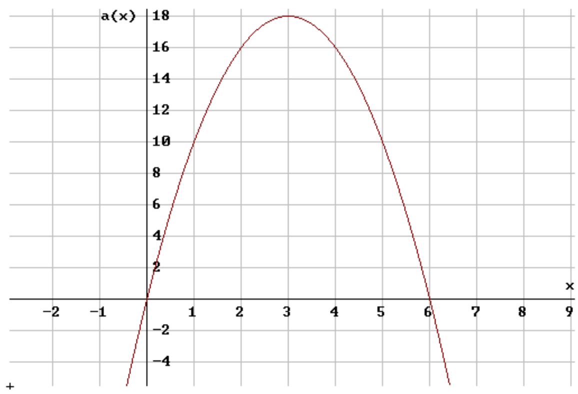
O projéctil atinge as águas do mar 6,4 s após o lançamento.

d) Resolvendo a condição
$h(t) \geq 8 \Leftrightarrow -t^2 + 4t + 5 \geq 8$,
obtém-se por solução $t \in [1, 3]$.
Portanto, durante 2 segundos o projéctil esteve a uma altura superior ou igual a 8 metros em relação à base do farol.

9.

a) Designando por y a outra dimensão do terreno, temos: $Perímetro = 2x + y = 12$ e $Área = x \times y$.
Logo, $a(x) = x(12 - 2x) = 12x - 2x^2$.

b) Como $a(x) = -2(x-3)^2 + 18$, o vértice da parábola é V (3, 18).
Os zeros são $x = 0$ e $x = 6$, pois
$a(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(6 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$.
O eixo de simetria é a recta vertical de equação $x = 3$.



c) A área é máxima (18 m^2) quando a largura do terreno for de 3 metros ($x = 3$); consequentemente o terreno terá um comprimento de 6 metros.
A vedação será, portanto, tangente à árvore A.

d) Para a área pedida há dois valores possíveis para x: 2 ou 4. Como a árvore não pode ficar dentro do terreno a vedar, então a largura do terreno será 2 metros e o comprimento 8 metros.

$$\begin{aligned} a(x) = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad -2(x-3)^2 + 18 = 16 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 3 = 1 \quad \vee \quad x - 3 = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 4 \quad \vee \quad x = 2 \end{aligned}$$

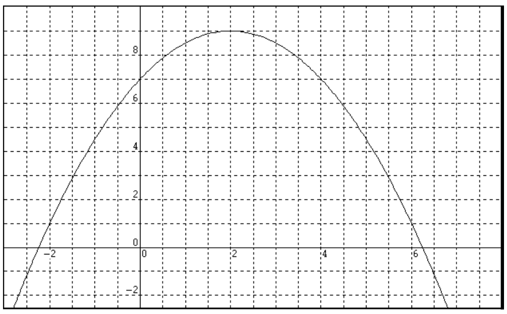
10.

a) Como $y(0) = -\frac{1}{2}(0+2)(0-6)+1 = 7$, o «volante» quando passar sobre a rede encontra-se a 7 m do chão.
Ora;

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x+2)(x-6)+1 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-4x-12)+1 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4-12)+1 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-4x+4)-\frac{1}{2}\times(-16)+1 \\ &= -\frac{1}{2}(x-2)^2+9 \end{aligned}$$

logo, $V \to (2,\ 9)$.

A trajectória do «volante» é parabólica, logo atingirá a altura máxima de 9 m, sobre o campo do jogador B numa posição cuja vertical distará 2 metros da rede.



b) Ora,

$$\begin{aligned} y = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 9 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}(x-2)^2 = -7 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 14 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2 - \sqrt{14} \quad \vee \quad x = 2 + \sqrt{14} \end{aligned}$$

Como $2 + \sqrt{14} = 5{,}74$ (2 c. d.), o «volante» distará da rede aproximadamente 5,74 metros.

12.

a) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

b) $[-3, 3]$.

c) $]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$.

d) $]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$.

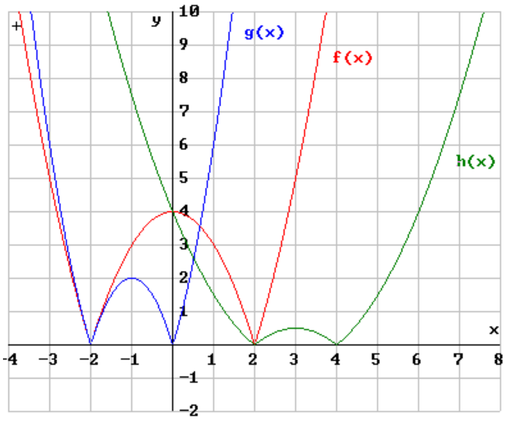
e) IR

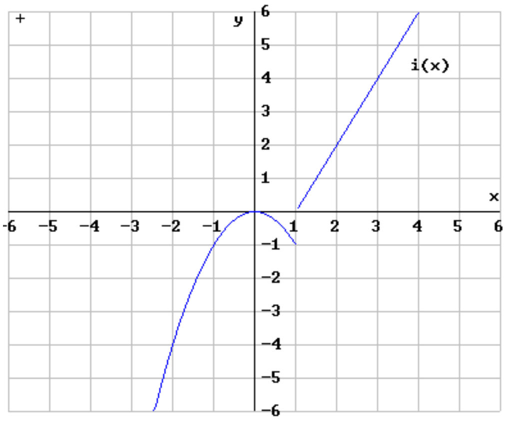
f) $\varnothing$

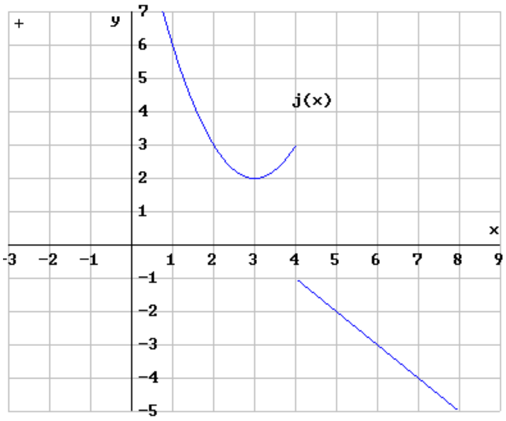
g) $[3, 5]$

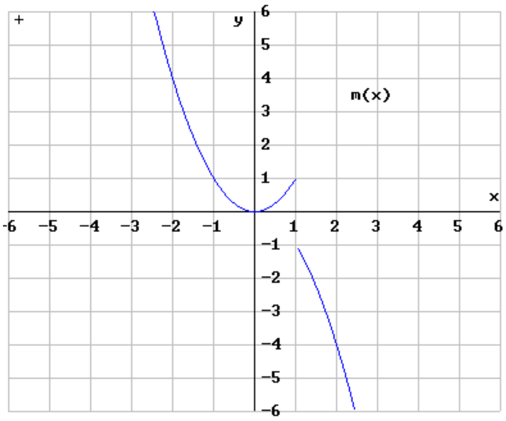
h) IR

13.









O Professor