

Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

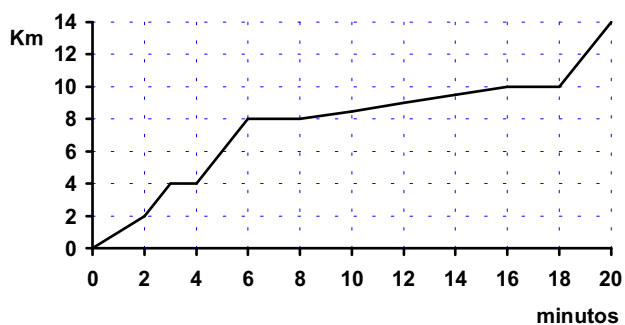
Generalidades sobre funções

13/03/98

10.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

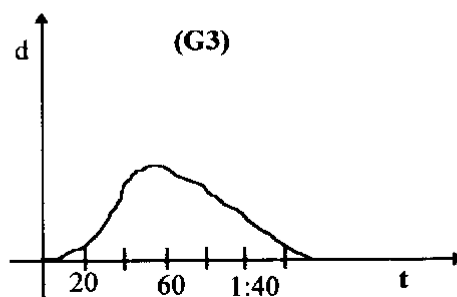
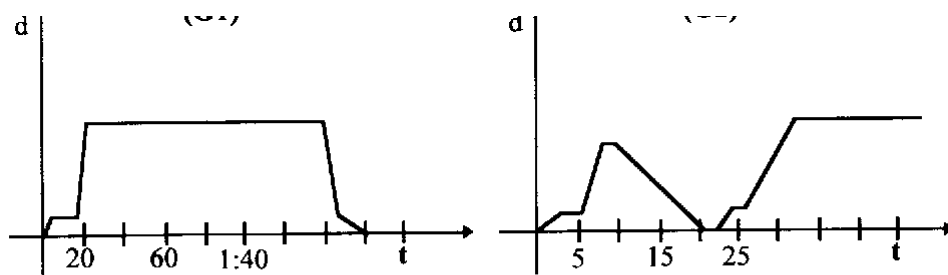
1. O gráfico representado ao lado relaciona a distância percorrida (em quilómetros) com o tempo (em minutos) gasto por um comboio que percorre toda uma certa linha.



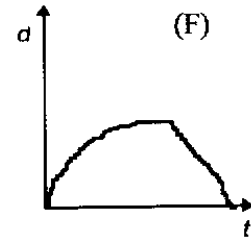
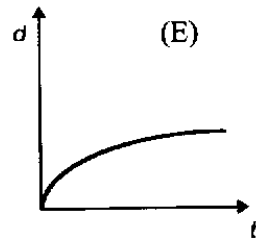
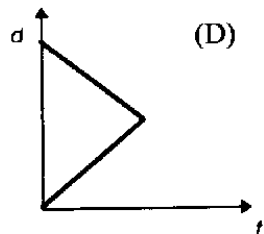
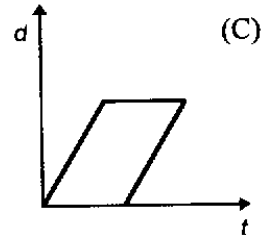
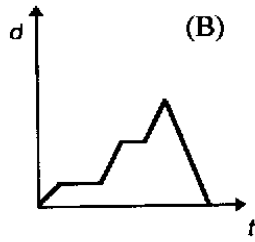
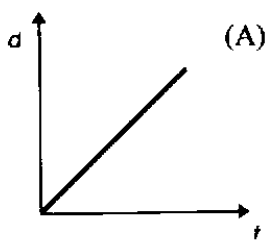
- Quantos quilómetros percorreu o comboio desde a origem até ao destino?
- Quanto tempo demorou a percorrer os primeiros 14 Km?
- Quantos quilómetros tinha percorrido o comboio ao fim de 10 minutos?
- Sabemos que o comboio só parou nas estações. Quantas estações existem nesta linha? Qual a distância entre as estações?
- Demorou o mesmo tempo em todas as paragens? Tenta encontrar uma justificação para esse facto.

2. Faz corresponder a cada situação o gráfico que melhor se ajusta.

- [A] O Tó resolveu ir correr durante duas horas. Saiu de casa e regressou para tomar banho.
- [B] No dia seguinte o Tó voltou a treinar, mas agora para um circuito de atletismo. Saiu de casa, apanhou o autocarro até ao circuito, correu durante 2 horas e voltou de autocarro para casa.
- [C] No 3.º dia o Tó voltou a ir ao Estádio de autocarro. A meio da viagem reparou que se tinha esquecido do equipamento. Saiu do autocarro, regressou a casa a pé e voltou a apanhar o autocarro e lá foi treinar 2 horas.

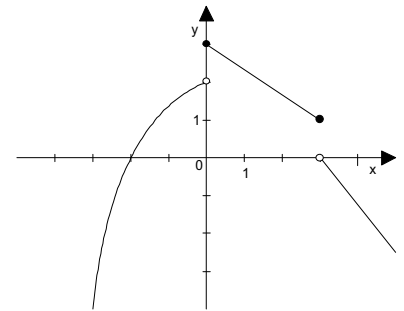
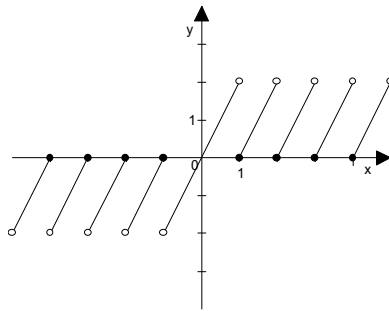
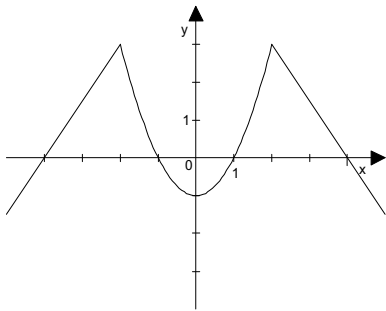


3. Em todos os gráficos, d é a distância relativa a um ponto de partida e t o tempo.



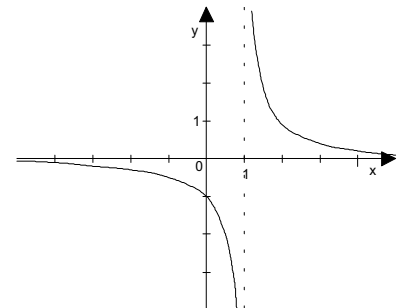
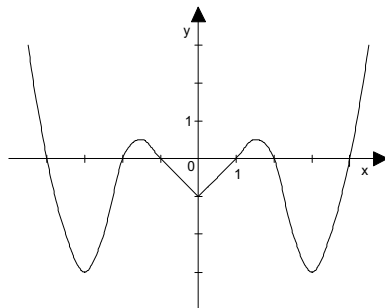
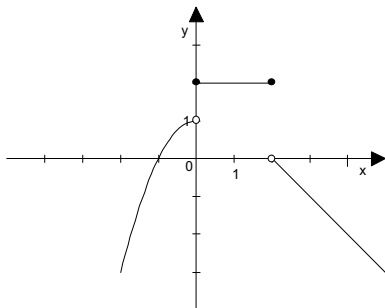
- Quais dos gráficos podem representar viagens? Fundamenta a tua resposta.
- Quais dos gráficos representam funções? Porquê?

4. Observa os gráficos das funções que se seguem e indica para cada uma delas:



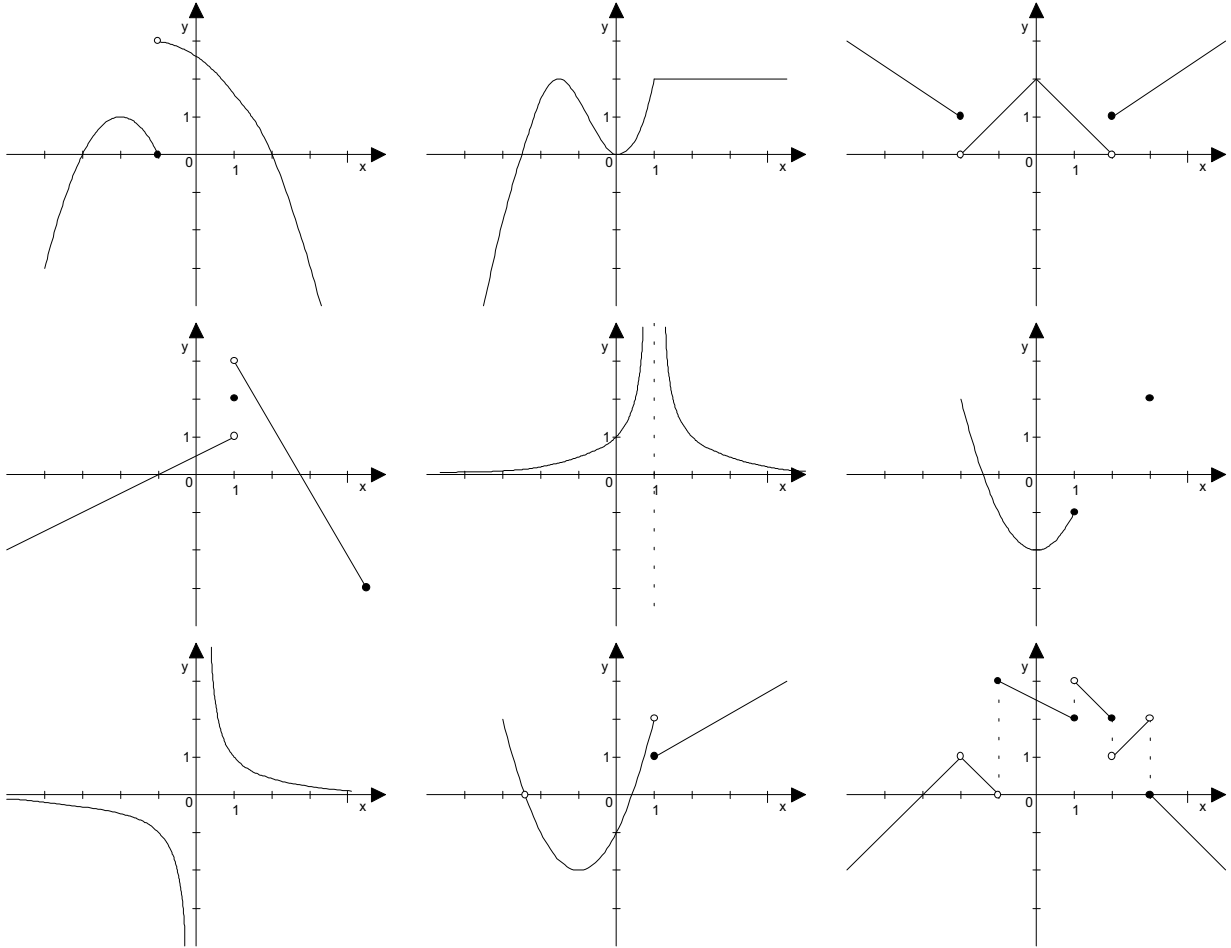
- o domínio, o contradomínio e os zeros
- os intervalos em que a função é positiva;
- os intervalos em que a função é negativa.

5. Observa os gráficos das funções que se seguem e indica para cada uma delas:



- o domínio, o contradomínio e os zeros;
- os intervalos em que a função é positiva;
- os intervalos em que a função é crescente.
- os intervalos em que a função é decrescente.
- os intervalos em que a função é constante.

6. Observa os gráficos das funções que se seguem e indica:



- Os extremos relativos e absolutos, caso existam.
- Qual o comportamento da função quando x tende para $+\infty$? E para $-\infty$?
- Quais destas funções não são contínuas e quais os pontos de descontinuidade.
- Como é o crescimento ou decrescimento de cada uma das funções? Para uma mesma função dá exemplo de crescimentos diferentes. Dá exemplos de crescimento do mesmo tipo.

7. Faz o esboço gráfico de cada uma das funções de modo a obedecer às seguintes condições:

- Domínio \mathbb{R}^+ e contradomínio $]5, +\infty[$.
- Domínio \mathbb{R}^+ e contradomínio \mathbb{R} .
- Domínio \mathbb{R} , crescente de $]-\infty, 3]$, $f(3) = 2$ e contradomínio $]-\infty, 2]$.
- Escolhe uma das tuas funções e transmite oralmente ao teu colega o teu gráfico de modo que ele consiga traçar um gráfico semelhante ao teu. Compara com o teu.

8. Utiliza o computador ou a máquina gráfica para visualizares os gráficos das funções abaixo indicadas.

$y_1 = x$	$f(x) = 2x$	$g(x) = 3x - 1$	$h(x) = x^2$	$y_2 = -3x^2 +$	$y_3 = x^3 - x$	$j(x) = 3x^3$	$l(x) = \frac{1}{x}$
-----------	-------------	-----------------	--------------	-----------------	-----------------	---------------	----------------------

- Para cada uma delas procura simetrias em relação:
 - ao eixo das ordenadas;
 - à origem do referencial.

- b) Para cada uma delas calcula a imagem de valores simétricos à tua escolha. Calcula a seguir a imagem de x e de $-x$. Compara o resultado com a alínea a).

Informação:

Uma função f diz-se **PAR** quando elementos simétricos do domínio têm a mesma imagem, isto é
 $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$.

Uma função f diz-se **ÍMPAR** quando elementos simétricos do domínio têm imagens simétricas, isto é
 $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$.

9. Considera a expressão que permite transformar graus Celcius em graus Fahrenheit : $F = \frac{9}{5}C + 32$.

Ela traduz a situação do quadro que vais completar:

C	0	5		-50	0,1	x
F		41	14			

- a) Qual foi a expressão que obtiveste na última coluna ? $F = \dots\dots\dots$, ou seja : $f : x \rightarrow y = \dots\dots\dots$.
- b) Justifica que se trata de uma função e indica quais as variáveis que intervêm nesta função.
- c) Com a ajuda do computador/calculadora gráfica, traça o gráfico de f , definida no intervalo $[-25;25]$
- d) O gráfico obtido já foi estudado quando na geometria se abordou a recta. Indica as coordenadas de um ponto do segmento de recta que constitui o gráfico
- e) Qual o domínio da função? Comprova no gráfico.
- f) Indica o contradomínio por observação do gráfico.
- g) Calcula analiticamente $f(3)$ e $f(-5)$. Verifica o resultado no gráfico. Formula a mesma questão, mas em "linguagem comum".
- h) Determina o(s) zero(s) da função. Onde se situam no gráfico? Formula a mesma questão em "linguagem comum".
- i) Determina o ponto de intersecção do gráfico com o eixo dos yy . Uma das coordenadas é não nula. Que representa?
- j) Usando o comando "Trace", faz leituras convenientes por forma comprovar que o declive da recta que contém o segmento de recta que define o gráfico é $\frac{9}{5}$.
- k) Escreve uma equação vectorial da recta referida na alínea anterior.

10. Considera ainda a função da questão anterior.

- a) Pela análise do gráfico, indica o(s) intervalo(s) onde se verifica:
- a1) $f(x) > 0$;
- a2) $f(x) < 0$.
- b) Confirma analiticamente as observações efectuadas na alínea anterior.
- c) No(s) intervalo(s) referido(s) em a1) a função diz-se
- d) A função é contínua. Justifica por palavras tuas.
- e) Verifica-se que, em todo o seu domínio, se tem: $a > b \Rightarrow f(a) \dots\dots f(b)$.
 f é uma função crescente em sentido estrito no domínio se e só se

11. Os gráficos das funções (de domínio \mathbb{R}) do tipo $y = mx + b$ são rectas. Nestas funções, m e b têm um significado especial.

- Observa o gráfico de algumas delas, fixando um valor para b e atribuindo a m os valores concretos que entenderes - positivos, negativos,... Que verificas?
- Qual a influência do parâmetro m nos gráficos desta família de funções?
- Estuda ainda a família de funções $y = mx + b$, fixando agora um valor para m e atribuindo a b os valores que entenderes. Que verificas?
- Qual a influência do parâmetro b nos gráficos desta família de funções?

12. Faz uma síntese, oral, do estudo da função afim: $y = mx + b$.

Refere-te ao tipo de gráfico, domínio, contradomínio, monotonia, zeros, intersecção com os eixos, sinal da função, coordenadas de um vector director da recta que define o seu gráfico.



13. O Fernando e a irmã vivem à beira de uma estrada que conduz a um castelo situado a 5 Km de distância. Ambos trabalham no Castelo, ela no período da manhã e ele no período da tarde. Cruzam-se sempre no caminho para que ela lhe possa entregar a chave do Castelo. Ele sai de casa às 12 horas e demora 15 minutos a fazer cada quilómetro. À mesma hora a sua irmã sai do Castelo e dirige-se para casa demorando 20 minutos para percorrer cada quilómetro.

A que horas se cruzam?

Quando se cruzam, a que distância está o Fernando do Castelo?

Qual te parece ser o horário de visita do Castelo?

Nota: Para resolver graficamente.

14. As cidades do Porto e Lisboa estão a 300 Km de distância e são servidas por uma linha de caminho de ferro. À mesma hora partem dois comboios directos (não param em nenhuma estação), um de Lisboa com destino ao Porto e outro do Porto com destino a Lisboa. O comboio que se dirige para Lisboa tem uma velocidade constante de 100 Km/h. O que se dirige para o porto tem uma velocidade constante de 80 Km/h.

Quanto tempo depois de partirem é que os comboios se encontram?

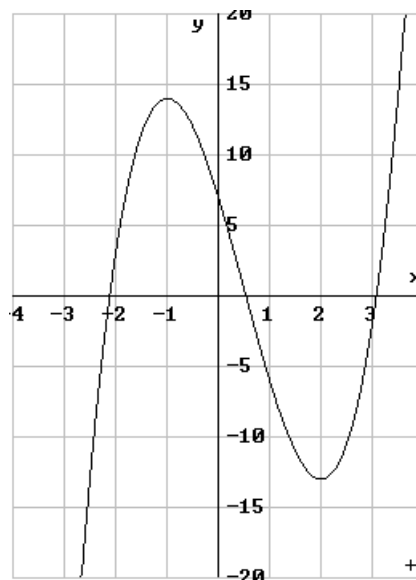
Nota: Para resolver graficamente.

15. Considera a função, real de variável real, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$.

- Qual o domínio de f ? Porquê?
- Traça no computador ou na calculadora gráfica o gráfico de f e a partir daí responde às questões:

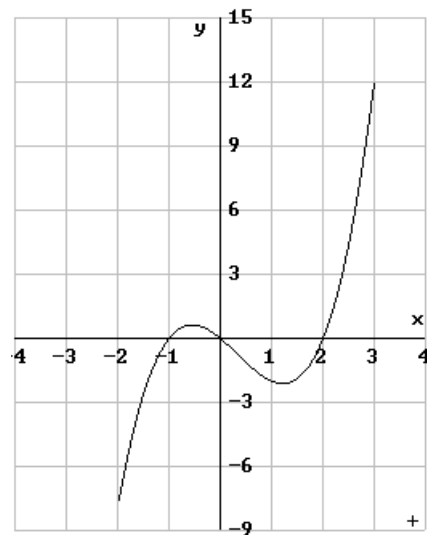
Nota: Na calculadora gráfica define a "janela" $[-5;5] \times [-15;15]$.

- Quantos zeros tem a função (ou quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$)?
- Qual o ponto de intersecção do gráfico com o eixo dos yy ?
- Em que intervalos (aproximadamente) a função é positiva? E negativa?
- Em que intervalo(s) a afirmação é verdadeira: " $\forall a, b \in I, a > b \Rightarrow f(a) < f(b)$ "?
- Estuda os intervalos de monotonia da função.
- Lê no gráfico os valores de x a que correspondem os máximo e mínimo locais.
- Conclui sobre a injectividade da função.



16. Considera a função real $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ no domínio $[-2; 3]$.

- a) A partir do seu gráfico (usa o computador/calculadora gráfica e uma escala adequada) indica o seu contradomínio e os pontos de intersecção com os eixos coordenados.
- b) Sobrepeõe, agora, o gráfico de $g(x) = f(x) - 2$ e de $h(x) = f(x) + 3$.
 - b1) O que aconteceu aos gráficos de g e de h em relação a f ? Justifica.
 - b2) Indica o domínio e o contradomínio de g e de h . Justifica.
- c) Apaga os gráficos de g e de h e sobrepeõe ao gráfico de f os gráficos de $j(x) = f(x - 3)$ e de $m(x) = f(x + 1)$.
 - c1) O que aconteceu aos gráficos de j e de m em relação ao de f ? Justifica
 - c2) Indica o domínio e o contradomínio de j e de m .
- d) Vamos generalizar as situações anteriores:
 - d1) Qual o domínio e o contradomínio de $r(x) = f(x) + k$, sendo k um número real?
 - d2) Qual o domínio e o contradomínio de $s(x) = f(x + k)$, sendo k um número real?



17. Apaga todas as funções do visor e deixa só o gráfico de f e considera o mesmo domínio.

- a) Sobrepeõe o gráfico de $g(x) = 2 \times f(x)$.
O que aconteceu? Seria de prever?
- b) Indica o domínio, os zeros e o contradomínio de g e compara-os com o domínio, os zeros e o contradomínio de f . Justifica o sucedido.
- c) Sem visualizares o gráfico, indica o domínio, os zeros e o contradomínio de $h(x) = 3 \times f(x)$.

18. Considera ainda a mesma função real $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ no domínio $[-2; 3]$.

- a) Sobrepeõe-lhe o gráfico de $t(x) = -f(x)$.
O que aconteceu?
- b) Indica o domínio, os zeros e o contradomínio de $t(x) = -f(x)$.

SOLUÇÕES

