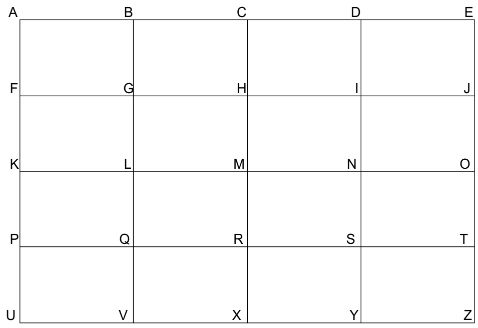
Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

26/01/98 *Vectores livres no plano e no espaço* **10.º Ano**

Nome:____ N.º:___ Turma: ___

1. A figura representa um rectângulo [AEZU] dividido em dezasseis rectângulos geometricamente iguais.
Determina:

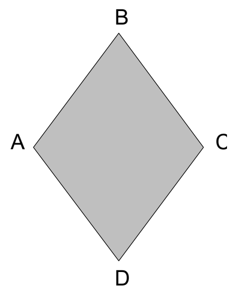


a) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{SI}$ **c)** $\overrightarrow{LR}+\overrightarrow{SJ}$ **e)** $\frac{2}{3}\overrightarrow{QE}$

b) $\overrightarrow{RP}-2\overrightarrow{MR}$ **d)** $Z+\overrightarrow{OC}$ **f)** $-\frac{1}{2}\overrightarrow{RH}$

2. Relativamente à questão anterior, resolve a equação $(2x-1)\overrightarrow{IS}=\overrightarrow{VB}$.

3. [ABCD] é um losango.



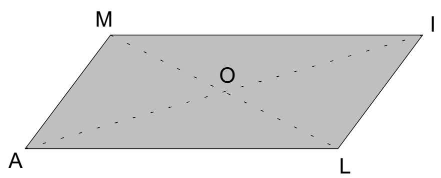
a) Indica quantos segmentos orientados podemos definir com:

- os lados do losango;
- os vértices do losango.

b) Indica quantos vectores distintos podemos definir com:

- os lados do losango;
- os vértices do losango.

4. A figura [LIMA] é paralelogramo e [AI] e [LM] são as suas diagonais.



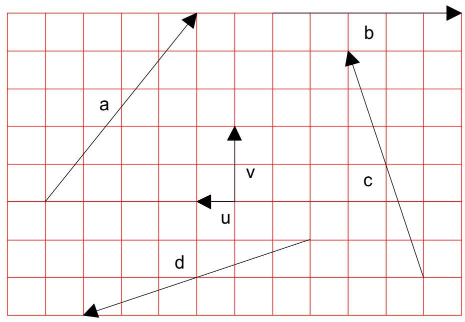
a) Justifica que $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OI}$.

b) Indica qual é a soma do ponto A com o vector $\overrightarrow{MI}$.

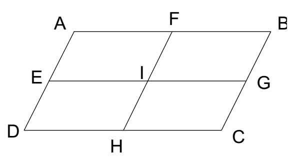
c) Completa:

$M+\overrightarrow{OL}=.....$; $A+\overrightarrow{LI}=.....$; $(M+\overrightarrow{IL})+\overrightarrow{MI}=.....$; $.....+\overrightarrow{AL}=I$.

5. Considera $(\vec{u},\vec{v})$ como base dos vectores do plano da figura.
Exprime em função de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ os vectores: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$.

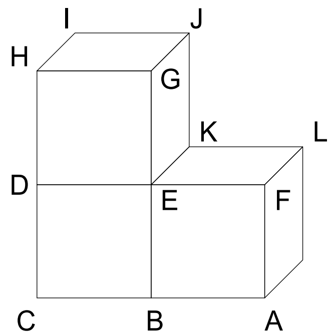


6. No paralelogramo [ABCD], E, F, G e H são os pontos médios dos seus lados. Determina:



a) $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AE}$; **b)** $A+\overrightarrow{IH}$; **c)** $\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{ED}$; **d)** $(A-F)+\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{GI}$.

7. A figura é formada por três cubos geometricamente iguais.



a) Usando as letras da figura, indica dois segmentos orientados que sejam representantes do vector $2\overrightarrow{JI}$.

b) Calcula:

$\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{LK}$; $\quad 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{EA}$; $\quad I + (\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{DE})$; $\quad (B + \overrightarrow{DE}) - (E + (\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IG}))$.

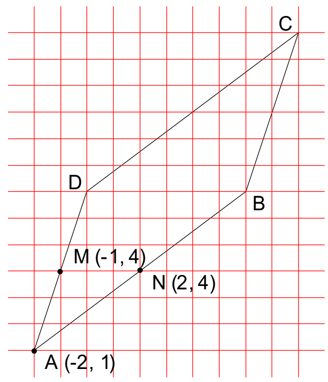
c) Quais os pontos assinalados na figura que pertencem ao plano HIJ?

d) Justifica as seguintes afirmações:

- A recta BG é perpendicular ao plano HIJ.
- A recta FL é paralela ao plano HIJ.

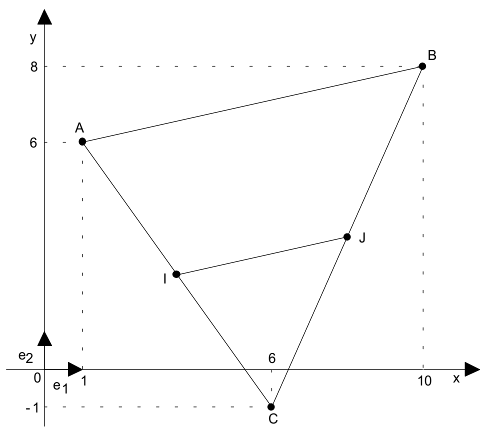
8. O centro de um quadrado é o ponto O (3, -3) e dois vértices consecutivos os pontos A (-1, -3) e B (3, 1). Determina as coordenadas dos outros vértices do quadrado.

9. [ABCD] é um paralelogramo. M e N são os pontos médios, respectivamente, de [AD] e [AB].
De acordo com os dados da figura, determina:



a) As coordenadas de B, D e C.

b) A medida da área do paralelogramo, considerando que no referencial se tomou para unidade de comprimento o centímetro.



10. Na figura, I e J são os pontos médios, respectivamente de [AC] e [CB].

a) Calcula as coordenadas de I e de J.

b) Mostra que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ são colineares, preenchendo os espaços a ponteado:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \ldots..$;
- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \ldots.. = \ldots.. \times \overrightarrow{AC} + \ldots.. \times \ldots.. = \ldots.. \times (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{..}) = \ldots.. \times \overrightarrow{AB}$.

c) Determina as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ e mostra através da relação que existe entre elas que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{IJ}$ são de facto colineares.

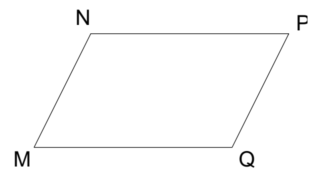
11. Calcula as coordenadas de dois vectores colineares com $\vec{a} = (3, -4)$ e de norma 15.

12. Determina um vector com a mesma norma de $\vec{u} = (-3, 5)$, diferente deste, que seja:

a) colinear com $\vec{u}$;

b) não colinear com $\vec{u}$.

13. Dados os pontos M (5,-1), N (-1,5) e P (4,4), determina as coordenadas de Q de forma que M, N, P e Q sejam os quatro vértices de um paralelogramo.



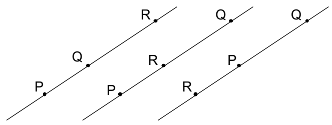
Sugestão: Repara que $Q = M + (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM})$.

14. Determina o valor real de k de forma que sejam colineares os vectores:

a) $\vec{u} = (3, k)$ e $\vec{v} = (k, 12)$;

b) $\vec{r} = (k - 2, 2)$ e $\vec{s} = (3, k + 2)$.

15. Averigua se são ou não colineares os pontos A B e C tais que:



a) A (-1,3); B (1,5) e C (4, 8);

b) A (2,1); B (5, -4) e C (3,-2).

Sugestão: Os pontos P, Q e R são colineares se e só se forem colineares os vectores $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$.

16. Num referencial ortonormado do espaço (O, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$), sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, com A (-1,3,4) e B (-2,1,-5).

a) Determina as coordenadas dos seguintes vectores: $\overrightarrow{AB}$; $2\vec{u} - 3\vec{v}$; $6\vec{v} - 4\vec{u}$.

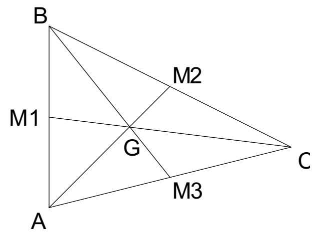
b) Determina as coordenadas dos seguintes pontos:

- I, ponto médio de [AB];
- M e N tais que $\overrightarrow{AM} = 2\vec{v}$ e $\overrightarrow{BN} = \vec{u} + \vec{v}$.

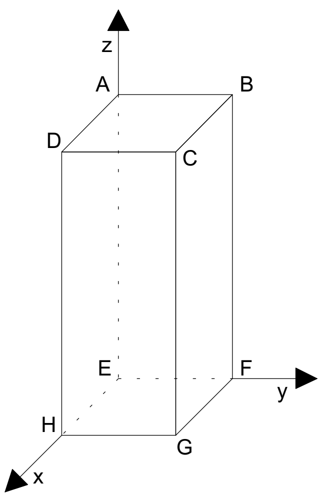
c) Calcula as coordenadas do centro de gravidade do triângulo [OAB].

Nota: «*As medianas de um triângulo encontram-se num ponto, centro de gravidade ou baricentro, cuja distância a qualquer dos vértices é $\frac{2}{3}$ da medida da mediana respectiva.*»

$\overline{GB} = \frac{2}{3}\overline{BM_3}$; $\overline{GA} = \frac{2}{3}\overline{AM_2}$; $\overline{GC} = \frac{2}{3}\overline{CM_1}$.



17. São dados os pontos A (1,1, $\sqrt{2}$) e B ($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$,0).
C é o simétrico de A em relação à origem do referencial.
Mostra que o triângulo [ABC] é rectângulo isósceles.



18. No referencial (E, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$) está representado um prisma rectangular em que $\overline{BC} = 3$; $\overline{AB} = 2$ e $\overline{BF} = 5$.

a) Usando as letras assinaladas na figura, completa as expressões seguintes:

$A + ... = C$; $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{HD} = ...$; $D + \overrightarrow{CB} = ...$;

$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = ...$; $G + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{BC} = ...$.

b) Determina as coordenadas do vector $\overrightarrow{HF}$

- no referencial (E, $\vec{e}$, $\vec{f}$) ;
- no referencial (E, $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$) .

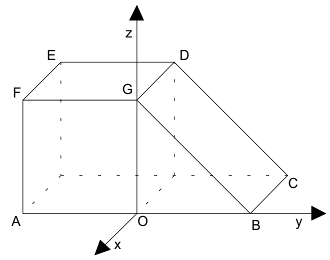
c) Determina a norma do vector $\overrightarrow{AG}$.

d) Escreve uma equação do plano mediador de [CD].

e) Escreve as coordenadas do centro da esfera tangente às faces [ABCD] e [EFGH], nos seus centros.

f) Qual é a posição de AB relativamente a DHG? E relativamente a GF? Justifica.

19. Considere num referencial o.n. a figura que é formada por um cubo e por um prisma triangular recto. O é o ponto médio de [AB]. O cubo tem de volume 27 cm^3. A unidade de comprimento é o centímetro.



a) Indica as coordenadas dos pontos E e C.

b) Determina as coordenadas de $\overrightarrow{GB}$.

c) Escreve uma equação do plano mediador de [GB].

<u>SOLUÇÕES</u>

1. $\overrightarrow{SH}$; $\overrightarrow{RF}$; $\overrightarrow{MJ}$; M; $\overrightarrow{QI}$; $\overrightarrow{HM}$.

2. $x = -\dfrac{1}{2}$

3.

a) 8; 12.

b) 4; 8.

4.

a) O ponto O é o ponto médio de [AI], as diagonais de um paralelogramo bissectam-se, logo $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OI}$.

b) L.

c) O; M; L; I.

5. $\vec{a} = -4\vec{u} + \dfrac{5}{2}\vec{v}$; $\vec{b} = -5\vec{u} + 0\vec{v}$;

$\vec{c} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$; $\vec{d} = 6\vec{u} - \vec{v}$

6.

a) $\overrightarrow{EB}$.

b) E.

c) $\overrightarrow{IE}$.

d) $\overrightarrow{FI}$.

7.

a) [A,C] e [F,D].

b) $\vec{0}$; $\overrightarrow{CH}$; G; $\overrightarrow{FA}$.

c) H, A, M, E, K, I.

d) A recta BG é perpendicular a duas rectas secantes (HG e GJ) desse plano.
A recta FL é paralela à recta HI desse plano.

8. (7,-3) e (3,-7).

9.

a) B (6,7); D (0,7) e C (8,13).

b) 36.

10.

a) I ($\dfrac{7}{2}$, $\dfrac{5}{2}$); J (8, $\dfrac{7}{2}$).

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$;

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{2} \times \overrightarrow{AC} + \dfrac{1}{2} \times \overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2} \times (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \dfrac{1}{2} \times \overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{AB} = (9{,}2)$; $\overrightarrow{IJ} = (\dfrac{9}{2}{,}1)$.

De facto, $(9{,}2) = 2 \times (\dfrac{9}{2}{,}1)$.

11. $\overrightarrow{v_1} = (9,-12)$ e $\overrightarrow{v_2} = (-9,12)$.

12.

a) (3,-5).

b) (-3,-5).

13. O ponto Q pode ter as coordenadas (0,0), (10,-2) ou (-2,10).

14.

a) $k = 6$ ou $k = -6$.

b) $k = \sqrt{10}$ ou $k = -\sqrt{10}$.

15.

a) São colineares.

b) Não são colineares.

16.

a) $\overrightarrow{AB} = (-1,-2,-9)$; $2\vec{u} - 3\vec{v} = (4,3,23)$;
$6\vec{v} - 4\vec{u} = (-8,-6,-46)$.

b) I ($-\dfrac{3}{2}$,2,$-\dfrac{1}{2}$); M (-5,5,-6); N (-5,5,-6).

c) G (-1,$\dfrac{4}{3}$,$-\dfrac{1}{3}$).

Basta reparar que $G = O + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OI}$.

17. $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{8}$; $\left\|\overrightarrow{CA}\right\| = 4$; $\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \sqrt{8}$.

$\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2$ (é rectângulo em B);

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|$ (é isósceles).

18.

a) $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{GB}$; A; $\vec{0}$; H.

b) $\overrightarrow{HF} = (-3{,}2)$; $\overrightarrow{HF} = (-3{,}2{,}0)$.

c) $\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \sqrt{38}$.

d) $y = 1$.

e) ($\dfrac{3}{2}$,1,$\dfrac{5}{2}$).

f) Paralela; não complanar e perpendicular.

19.

a) E (-3,-3,-3) e C (-3,3,0).

b) (0,3,-3).

c) $y = z$.

O Professor