Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

08/01/98 ***Circunferência, círculo, elipse, superfície esférica e esfera*** **10.º Ano**

Nome:____ N.º:___ Turma: ___

1. A equação $(x+1)^2+(y-3)^2=4$ define uma circunferência.

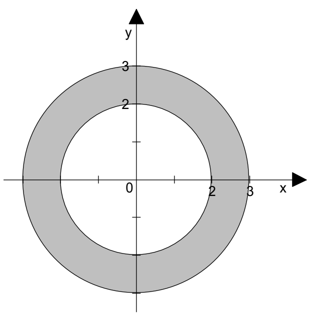
a) Indica o centro e o raio dessa circunferência.

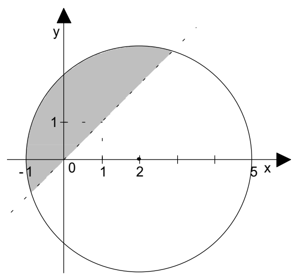
b) Desenvolve os casos notáveis e representa a equação na forma $x^2+y^2+Ax+By+C=0$.

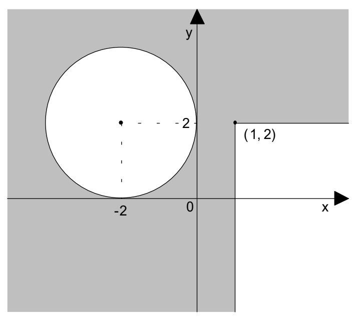
2. Averigua se as equações seguintes representam ou não circunferências e, em caso afirmativo, indica os respectivos centro e raio.

a) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$ **b)** $4x^2+4y^2+8x+16y=-19$ **c)** $x^2+y^2+8x-2y+21=0$

3. Caracteriza por uma condição cada uma das seguintes regiões planas coloridas:

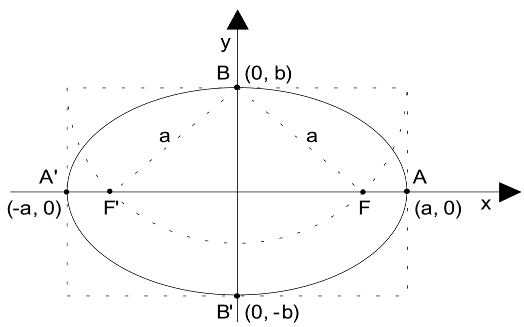






4. Determina a equação reduzida da elipse definida por $4x^2+9y^2-36=0$.

5. Determina a equação reduzida da elipse de focos F (3, 0) e F' (-3, 0) e semieixo maior igual a 5.

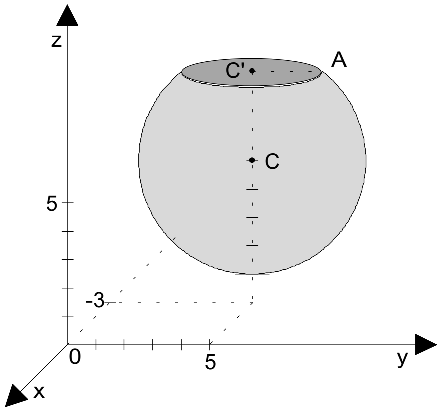


6. A elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ está inscrita num rectângulo de lados 2*a* (horizontal) e 2*b* (vertical).
Justifica que a circunferência de centro B e raio *a* corta o eixo Ox em F e F' (focos da elipse).

7. Partindo da circunferência de equação $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$, encontra uma equação da figura geométrica que dela se obtém quando cada ponto M (x, y) é transformado noutro, M' (x', y') em que $x'=x$ e $y'=3y$.

8. A condição $x^2+y^2+z^2-6x+2y-2z\leq 7$ representa uma esfera.
Determina o centro e o raio.

9.



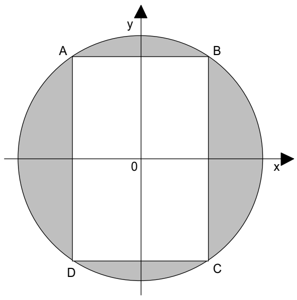
a) Determina uma condição que defina a parte da esfera representada, sabendo que o raio do círculo de centro C' (distância de C' a A) é $\sqrt{7}$ e que esse círculo é paralelo ao plano xOy.

b) O sólido da figura intersecta algum dos planos coordenados? Justifica.

10. Determina o centro e o raio da circunferência definida pela condição:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25 \quad \wedge \quad z = 1 .$$

11. Qual o lugar geométrico dos pontos do espaço que obedecem à condição $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 4$ (em IR^3)?



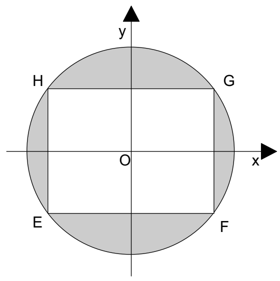
12. Observa a figura ao lado.
Ox e Oy são eixos de simetria do rectângulo [ABCD] inscrito na circunferência.
O ponto A tem as coordenadas (-2, 3).
Determina:

a) As coordenadas dos pontos B, C e D.

b) A distância de A a C.

c) A medida da área tracejada.

13. [EFGH] é um rectângulo inscrito na circunferência de centro (0, 0) e raio 5 unidades.

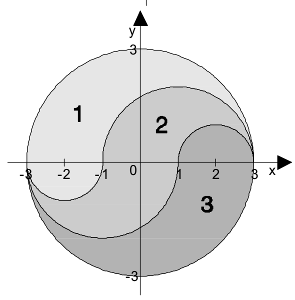


a) Escreve a equação da circunferência.

b) Qual é a ordenada de F sabendo que a sua abcissa é 4?

c) Determina uma condição que caracterize a região sombreada da figura.

14. O círculo da figura ao lado, de centro (0, 0) e raio 3, está dividido em três regiões pintadas de cores diferentes.



a) Qual será a região de maior área? E de maior perímetro?
Confirma a tua conjectura efectuando os cálculos necessários

b) Determina uma condição que defina a região **1**.

15. Escreve a equação da superfície esférica de centro no ponto de coordenadas (-1, 2, 0) e tangente ao plano de equação $y = 5$.

16. Identifica a superfície esférica definida pela equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z + 12 = 0$.

17. Qual o valor real que deve ter o parâmetro *m* para que a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z + m = 0$ represente:

a) um ponto? (indica as coordenadas desse ponto)

b) um conjunto vazio?

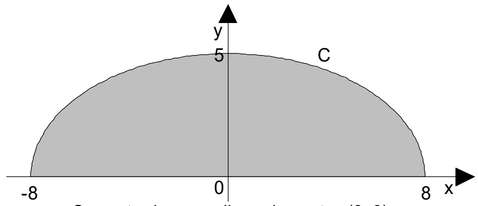
18. Relaciona *m* e *a* (parâmetros reais) de forma que a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + ay - 2z + m = 0$ represente uma superfície esférica de raio 4.

19. Determina o centro e o raio da circunferência definida por: $(x+1)^2+(y+3)^2+z^2=25 \ \wedge \ y=1$.

20. Determina a equação reduzida da elipse formada pelos pontos cuja soma das distâncias a $F_1(-2,\ 0)$ e $F_2(2,\ 0)$ é 12 unidades.

21. Determina a equação reduzida da elipse cujo semieixo maior é 5, tem centro em (0, 0) e passa pelo ponto (4, 1).

22. Caracteriza por uma condição a seguinte região sombreada:



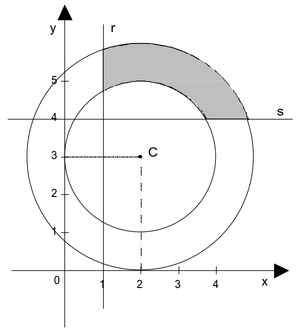
C - parte de uma elipse de centro (0, 0)

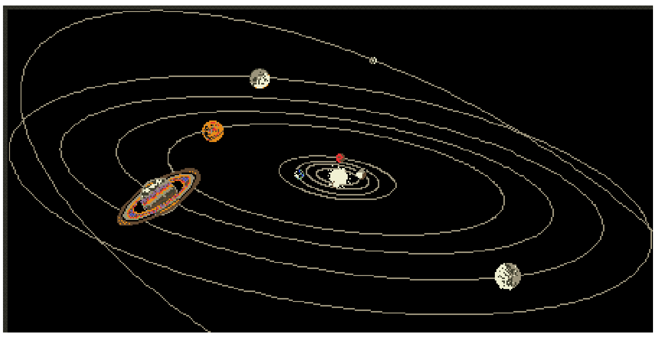
23. Considera a circunferência de centro no ponto de coordenadas (1, -2) e raio $\sqrt{3}$. Indica as coordenadas de três pontos de modo que um seja interior, outro exterior e o terceiro pertencente à circunferência.

24. Descreve o conjunto de pontos do espaço representados por cada uma das seguintes condições:

a) $x^2+y^2+z^2 \leq 16$ **b)** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2>2$ **c)** $x^2+y^2+z^2 \leq 4 \ \wedge \ z=0$

25. Na figura estão representadas duas circunferências concêntricas de centro C (2, 3).
Uma contém o ponto (2, 0) e a outra o ponto de coordenadas (0, 3).
As rectas r e s são paralelas aos eixos coordenados.
A recta s contém o ponto de coordenadas (0, 4) e a recta r contém o ponto de coordenadas (1, 0).
Define por uma condição o conjunto de pontos de coordenadas representado a sombreado na figura.





26. Como sabes, a Terra move-se à volta do Sol com uma órbita elítica e o Sol ocupa um dos seus focos. Em termos aproximados, o semieixo maior da órbita tem 149 milhões de quilómetros de comprimento e a excentricidade é 0,017.
Desprezando os seus raios, determina, em Km:

a) a distância mais curta entre a Terra e o Sol;

b) a maior distância entre o Sol e a Terra.

NOTA: A excentricidade **e** de uma elipse com semieixo maior **a** ou **b** e semi-distância focal **c** é $e=\frac{c}{a}$ ou $e=\frac{c}{b}$, respectivamente.

27. Considera as duas elipses de equações $2x^2+y^2=3$ e $x^2+2y^2=3$.
Indica as coordenadas dos pontos de intersecção com os eixos e representa as duas elipses no mesmo referencial.
Obtém as coordenadas dos pontos de intersecção das duas elipses.

NOTA: Tenta resolver o problema recorrendo à visualização e às simetrias das elipses.

28. Considera, num referencial do espaço, uma esfera de centro na origem e raio r. Define o conjunto dos pontos da superfície esférica que estão à distância k do plano xOy.
Discute a influência da relação entre k e r neste conjunto de pontos.

SOLUÇÕES

1.

a) C (-1, 3) e $r = 2$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

2.

a) C (2, -3) e $r = 3$

b) C (-1, -2) e $r = \frac{1}{2}$

c) Conjunto vazio

3.

a) $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$

b) $(x-2)^2 + y^2 \leq 9 \quad \wedge \quad y > x$

c) $(x+2)^2 + (y-2)^2 \geq 4 \quad \wedge \quad (x \leq 1 \quad \vee \quad y \geq 2)$

4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

6.

7. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{144} = 1$ (elipse)

8. C (3, -1, 1) e $r = 3\sqrt{2}$

9.

a) $(x+3)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 \leq 16 \quad \wedge \quad z \leq 8$

b) Apenas intersecta o plano yOz.

10. C (1, 0, 1) e $r = 4$

11. Superfície cilíndrica que intersecta o plano xOy segundo uma circunferência de centro (3, -5, 0) e raio 2 unidades.

12.

a) B (2, 3); C (2, -3) e D (-2, -3)

b) $2\sqrt{13}$

c) 16,84 (2 c.d.)

13.

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) -3

c) $x^2 + y^2 \leq 25 \quad \wedge \quad (|x| \geq 4 \quad \vee \quad |y| \geq 3)$

14.

a) $A_1 = A_2 = A_3 = 3\pi$ e $P_1 = P_2 = P_3 = 6\pi$

b)

$(x+2)^2 + y^2 \leq 1 \quad \vee \quad (x^2 + y^2 \leq 9 \quad \wedge \quad (x-1)^2 + y^2 \geq 4 \quad \wedge \quad y \geq 0)$

15. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$

16. Superfície esférica de centro (2, -4, 1) e raio 3

17.

a) $m = 21$; C (2, -4, 1)

b) $m > 21$

18. $m = \frac{a^2 - 44}{4}$

19. C (-1, 1, 0) e $r = 3$

20. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$

21. Para $a = 5$: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{9}} = 1$;

Para $b = 5$: $\frac{x^2}{\frac{50}{3}} + \frac{y^2}{25} = 1$

22. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} \leq 1 \quad \wedge \quad y \geq 0$

23. Interior: A (1, -2) (p.e.);
Exterior: B (1, 1) (p.e.);
Na circunferência: C (1, -2+ $\sqrt{3}$) (p.e.)

24.

a) Esfera de centro na origem e raio 4.

b) Conjunto de pontos do espaço que não pertencem à esfera de centro no ponto de coordenadas (1, -2, 3) e raio $\sqrt{2}$.

c) Círculo em IR^3, pertencente ao plano xOy, centrado em (0, 0, 0) e de raio 2.

25. $4 \leq (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 9 \quad \wedge \quad y \geq 4 \quad \wedge \quad x \geq 1$

26.

a) 146.467.000 Km

b) 151.533.000 Km

27. ($-\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0); ($\sqrt{\frac{3}{2}}$, 0); (0, $-\sqrt{3}$); (0, $\sqrt{3}$).

($-\sqrt{3}$, 0); ($\sqrt{3}$, 0); (0, $-\sqrt{\frac{3}{2}}$); (0, $\sqrt{\frac{3}{2}}$).

(1, 1); (-1, -1); (1, -1) e (-1, 1).

28. O lugar geométrico dos pontos que estão a uma distância dada de um plano são dois planos paralelos a ele.
Neste caso, os planos de equações $z = k$ e $z = -k$.

Se $k > r$, os planos não intersectam a superfície esférica e o conjunto de pontos é vazio.

Se $k = r$, o corte são dois pontos:
(0, 0, k) e (0, 0, -k).

Se $k < r$, os cortes são duas circunferências:
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \wedge \quad |z| = k$.

O Professor