

Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

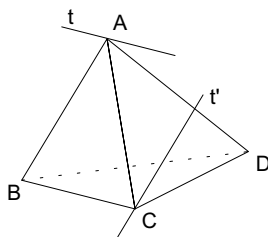
Intersecção de sólidos por um plano dado

14/10/97

10.º Ano

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

Observe atentamente as figuras e, sempre que possível e necessário, construa os modelos representados para encontrar com mais facilidade as respostas às perguntas formuladas. Em cada caso tente fazer uma breve descrição do modo como procedeu e da sequência de raciocínio que o conduziram às diversas respostas.

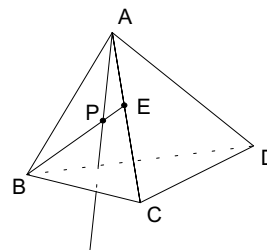


1. Na figura ao lado está representado um tetraedro e duas rectas, t e t' .
 A recta t é paralela à recta BC e contém o ponto A .
 A t' é paralela à recta AB e contém o ponto C .
 Qual é a posição relativa das rectas t e t' ?

Sugestão: Duas rectas paralelas definem um plano.

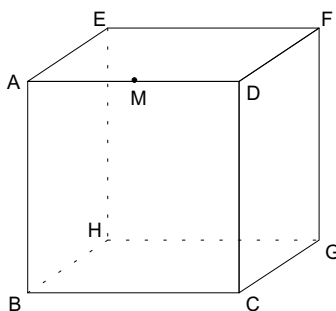
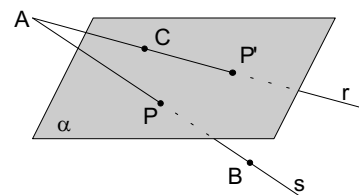
1. Considerando as indicações da perspectiva cavaleira, identifique o erro que se cometeu ao representar a figura.

$$\{P\} = AP \cap BE \quad \text{e} \quad E \in AC.$$



1. Na figura, as rectas r e s intersectam-se no ponto A e intersectam o plano α , respectivamente, nos pontos P e P' .

Desenhe a recta CB , respeitando as indicações da perspectiva cavaleira.



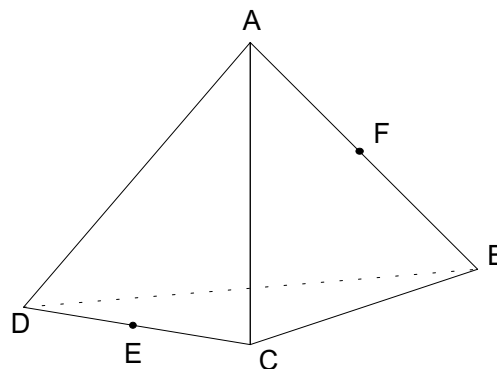
4. Considere o cubo $[ABCDEFGH]$, sabendo que M é um ponto da aresta $[AD]$.

a) Desenhe a secção produzida no cubo pelo plano EGM .

b) Calcule o perímetro da secção sabendo que $\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AD}$ e a aresta do cubo tem 2 cm de comprimento.

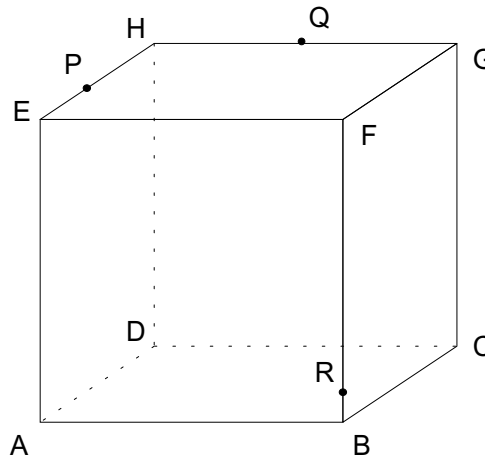
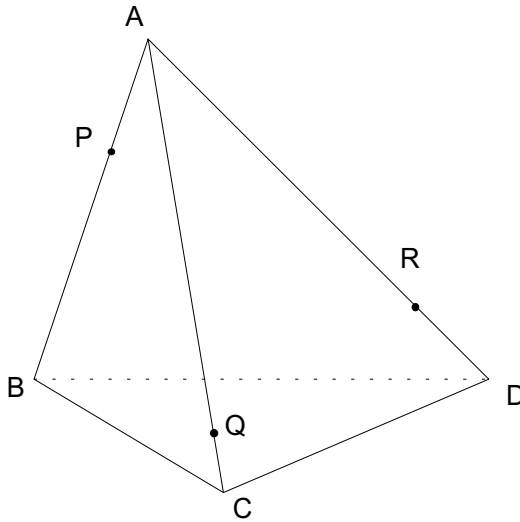
5. Observe a figura seguinte que representa um tetraedro $[ABCD]$ e E e F são dois pontos de duas das suas arestas.

- As rectas BC e EF são coplanares? Justifique.
- Indique dois planos secantes definidos por pontos da figura e a respectiva recta de intersecção.
- Os pontos A, B, C e D quantos planos definem?
- Desenhe a secção do tetraedro produzida por um plano paralelo ao plano BCD e que contenha o ponto F .

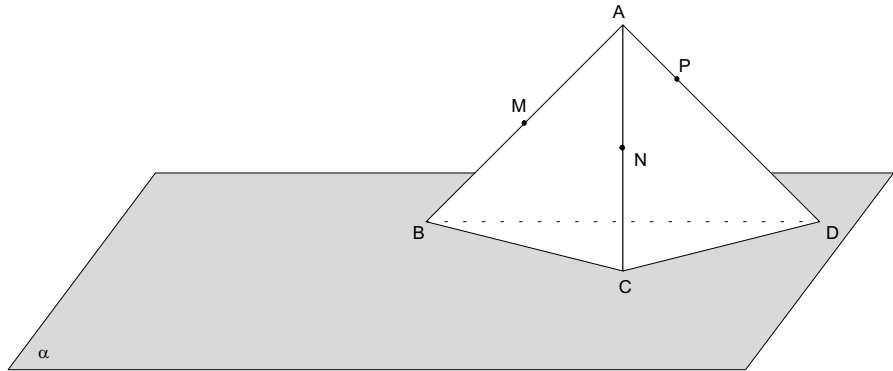


6. Por um ponto P traçam-se duas rectas, $r \perp t$ e $s \perp t$, sendo t uma terceira recta. Qual a posição do plano definido pelas rectas r e s em relação a t ?

7. Trace, em cada um dos casos, a intersecção do plano PQR com as faces dos sólidos seguintes:



8. O tetraedro regular da figura tem a base [BCD] contida no plano α . Os pontos M e N são os pontos médios, respectivamente, das arestas [AB] e [AC]; $P \in [AD]$ e P não é o ponto médio de [AD].



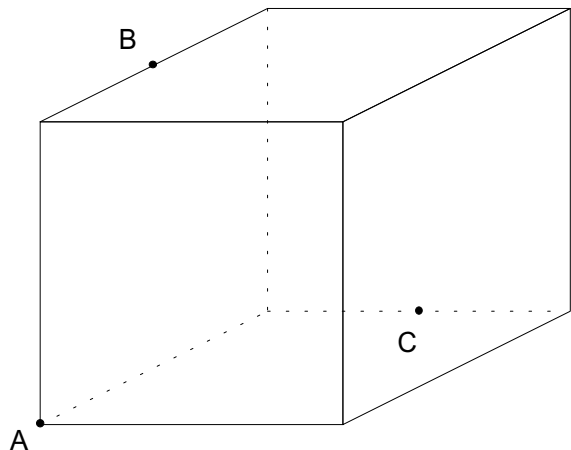
- a) Mostre que BC é paralela ao plano MNP.
- b) Justifique que é verdadeira a afirmação: "PN e CD intersectam-se num ponto de α ."
- c) Quantos planos há paralelos ao plano MNP e passando por BC? (Porque razão α não pode ser paralelo ao plano MNP?)
- d) Desenhe a recta de intersecção do plano MNP com o plano BCD.

9. Um recipiente cúbico de aresta 6 dm está furado em três pontos (um vértice e dois pontos médios de duas arestas) como mostra a figura. Poder-se-ão deitar no recipiente 180 litros de líquido sem perigo da cuba pingar?

Sugestão: A capacidade do recipiente furado será máxima quando o plano ABC for horizontal e o sólido de maior volume ficar por baixo deste plano.

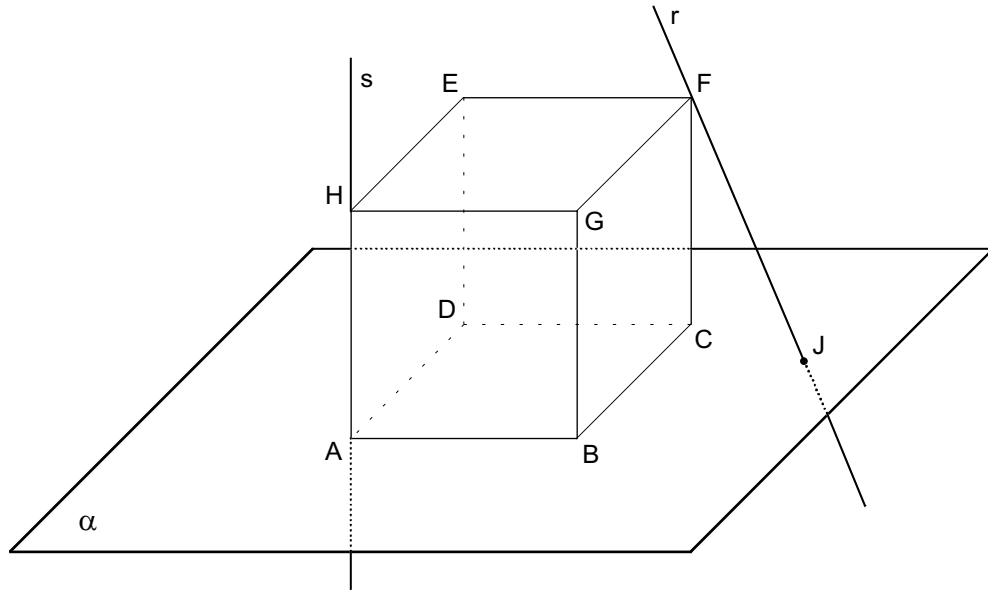
Determine a secção obtida no cubo por esse plano e comprove que poderá considerar um conjunto de três sólidos: o cubo e duas pirâmides.

Relacione os seus volumes e conclua (qual é a razão de semelhança entre as duas pirâmides?).



10. Um cubo [ABCDEFGH] está "assente" no plano α .

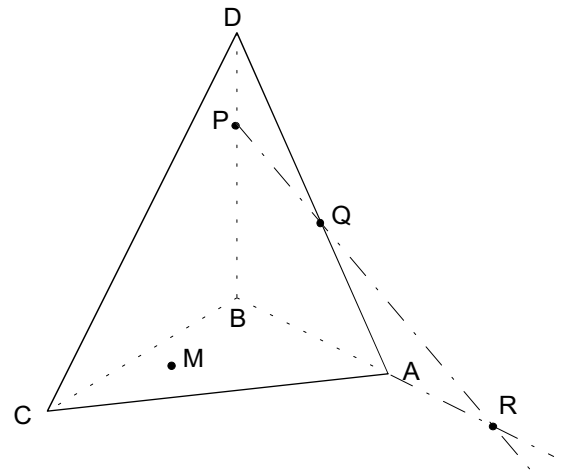
- A recta r contém o ponto F e intersecta o plano α no ponto J ;
- $A \in s$ e $H \in s$.



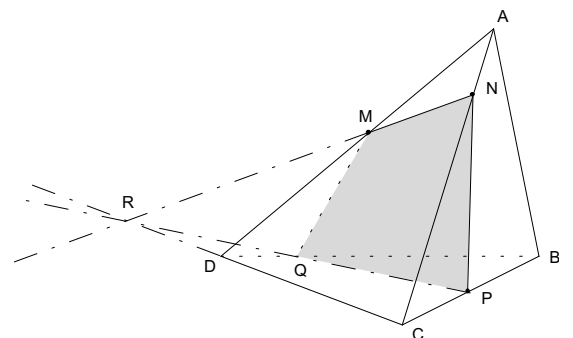
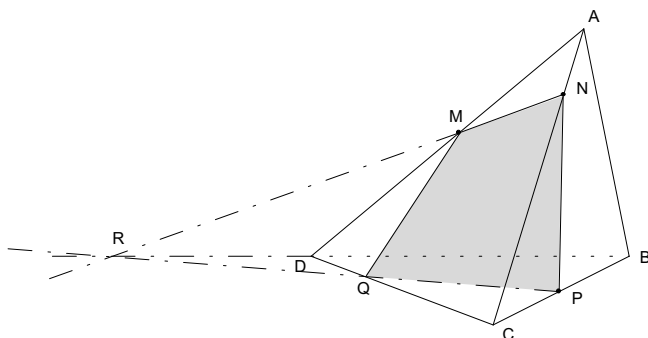
- Indique dois planos dos quais s é a intersecção.
- Indique 3 pontos do plano mediador de $[AC]$.
- Qual é a posição relativa das rectas s e JB ? Justifique.
- Mostre que a intersecção dos planos α e AFJ é a recta JA .
Desenhe essa recta, respeitando as indicações da perspectiva cavaleira.
- Determine a secção plana que se obtém ao sectionar o cubo pelo plano AFJ .
Justifique, de forma muito sucinta, as construções efectuadas.

11. A figura ao lado representa um tetraedro. Os pontos P e Q são pontos das arestas $[BD]$ e $[DA]$, respectivamente. As rectas PQ e BA intersectam-se em R .

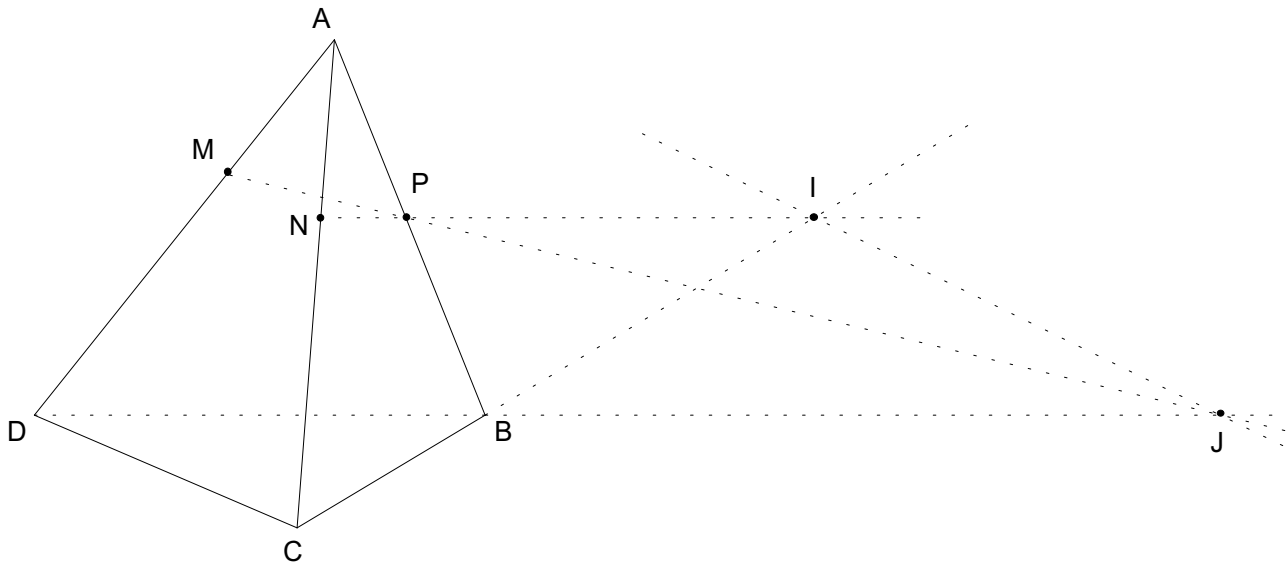
- Justifique que a intersecção dos planos CPQ e ABC é a recta CR .
- Determine a secção plana que se obtém ao sectionar o tetraedro pelo plano MPQ , sendo $M \in [ABC]$. Justifique de forma sucinta as construções que efectuou.



12. M é um ponto de $[AD]$, N é um ponto de $[AC]$ e P um ponto de $[BC]$.
Pretende-se determinar a intersecção do plano MNP com o tetraedro.
Eis duas figuras. O que pensa delas?



13. M é um ponto de [AD], N um ponto de [AC] e P um ponto de [AB], distintos dos vértices do tetraedro. Eis uma figura. Observe-a.

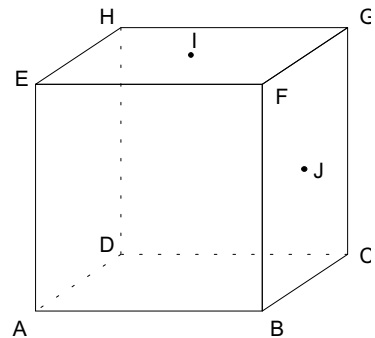


- a) A que questão responde?
- b) Redija a demonstração.
- c) As rectas MN e DC intersectam-se em K. Que pode dizer dos pontos I, J, K?

14. O cubo [ABCDEFGH] tem por aresta a e os pontos I e J são centros de faces.

- a) Calcule o comprimento de [IJ], em função de a .
- b) Calcule o comprimento de [AI] e o comprimento de [AJ], em função de a .
- c) Determine a secção feita no cubo pelo plano AIJ.

Sugestão: Recorra a um cubo auxiliar justaposto ao dado pela face [BCGF] e repare que [AJ] é metade da diagonal do paralelepípedo obtido.

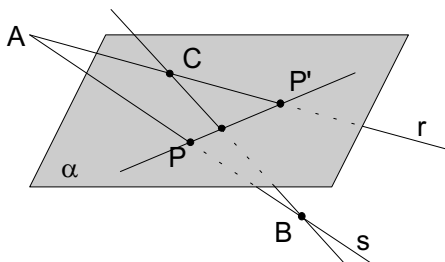


SOLUÇÕES

1. Sabemos que duas rectas paralelas definem um plano.

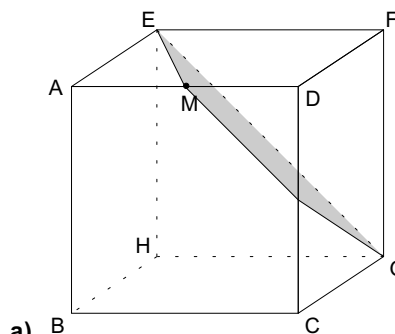
As rectas t e BC são paralelas, portanto definem um plano. Este plano é o plano da face [ABC] do tetraedro. A recta t' é paralela a AB , logo estas rectas definem um plano. Este plano é o plano da face [ABC] do tetraedro. Logo as rectas t e t' são coplanares e concorrentes.

2. A recta AP pertence ao plano da face [ABC] do tetraedro. Como a face é visível, a recta deve ser representada a cheio.



3.

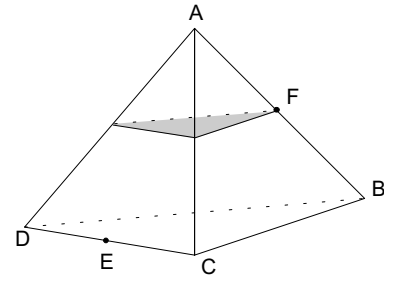
4.



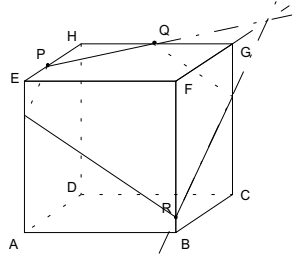
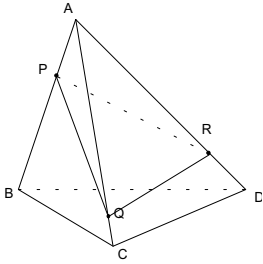
- a)
- b) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$ cm.

5.

- O plano definido pela recta BC e pelo ponto F é o plano da face [ABC] do tetraedro. O plano definido pela recta BC e pelo ponto E é o plano da face [BCD] do tetraedro. Como as faces não pertencem ao mesmo plano, as rectas BC e EF não são complanares.
- Por exemplo: os planos ABD e BCD são secantes e a recta de intersecção é a recta BD.
- Quatro planos: os planos que contêm as 4 faces do tetraedro.
-



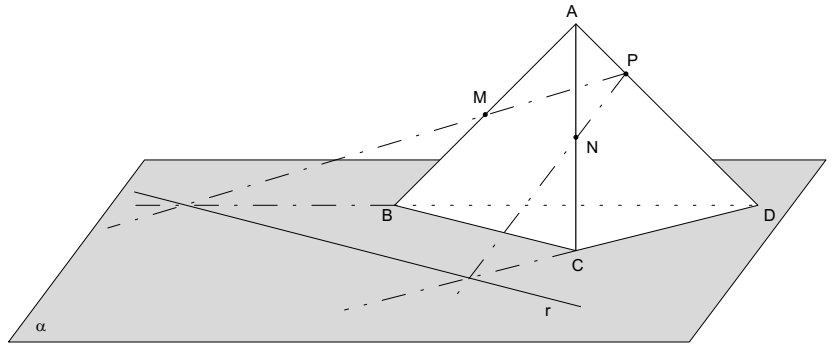
6. A recta t é perpendicular ao plano definido pelas rectas r e s , pois é perpendicular a duas rectas concorrentes desse plano.



7.

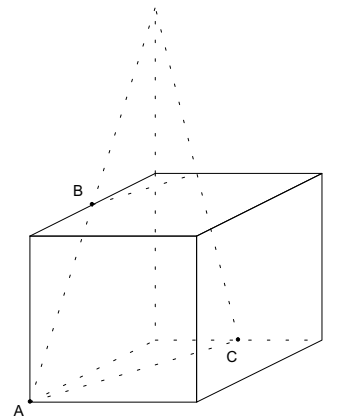
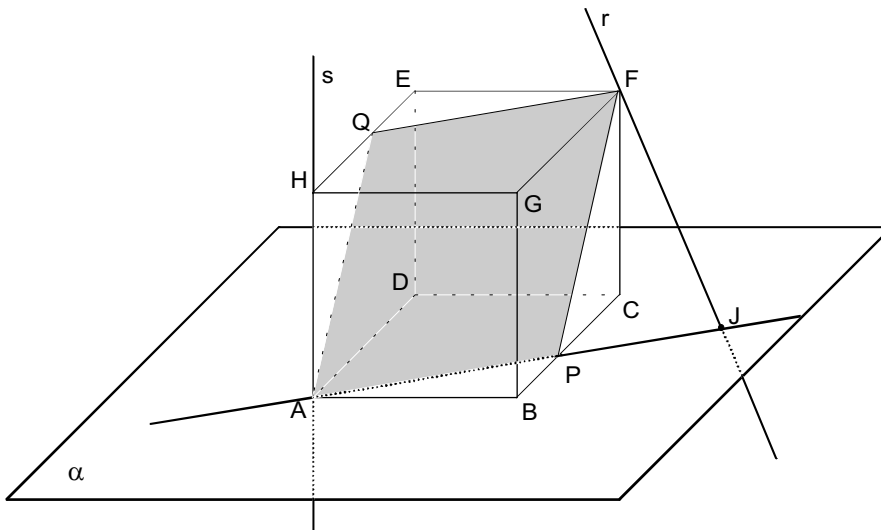
8.

- Sendo o tetraedro regular, se M e N são os pontos médios das arestas a que pertencem, vem $MN \parallel BC$. Logo, como no plano MNP existe uma recta paralela à recta BC, o plano MNP é paralelo a esta recta.
 - PN e CD são rectas complanares e concorrentes, então intersectam-se num ponto que pertence a CD e a α , pois $CD \in \alpha$ (CD é a intersecção dos planos ACD e α).
- Um plano.
Se α e MNP têm um ponto comum (PN intersecta α), então não podem ser paralelos.
 - A recta de intersecção é r (ver figura).



9. É possível deitar 180 litros neste recipiente (teoricamente) nas condições dadas visto a sua capacidade máxima ser de 184,5 litros.
(Volume da pirâmide maior: 36 litros; Volume da pirâmide menor: 4,5 litros)

10.

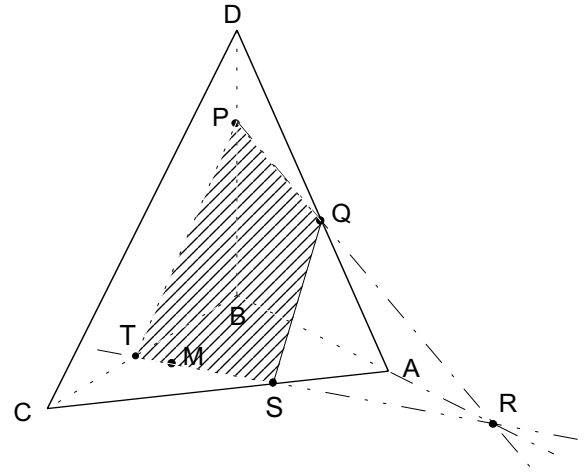


- A recta s é, por exemplo, a intersecção dos planos AHG e AHE.
- B, D e G são 3 pontos do plano mediador de [AC].
- A recta s é perpendicular ao plano α , logo é perpendicular a todas as rectas de α . Como JB é uma recta desse plano, então s é perpendicular a JB.

- d) O ponto A é ponto comum aos planos α e AFJ; o ponto J é também ponto comum aos mesmos planos. Como A e J são distintos e simultaneamente comuns aos planos α e AFJ, então a recta JA é a intersecção desses planos.
- e) Da alínea anterior, conclui-se que [AP] é a intersecção do plano seccionador com a face [ABCD] do cubo. A secção na face [BCFG] é o segmento [PF], pois F é comum a essa face e ao plano seccionador. Como um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas, as secções nas outras duas faces são os segmentos [FQ] e [QA], sendo [FQ] // [PA] e [QA] // [FP]. A secção plana que se obtém ao seccionar o cubo pelo plano AFJ é o paralelogramo [APFQ].

11.

- a) O ponto R pertence simultaneamente aos planos CPQ e ABC, pois é a intersecção das rectas PQ, pertencente ao plano CPQ, e BA, que é uma recta do plano ABC. O ponto C é um ponto do plano CPQ e também um ponto do plano ABC. Deste modo, os pontos R e C, distintos e simultaneamente pertencentes a esses dois planos, definem a recta CR que é a intersecção dos planos CPQ e ABC.
- b) Por raciocínio análogo ao da alínea anterior, conclui-se que a recta RM é a intersecção dos planos MPQ e ABC (Note que M pertence simultaneamente aos planos MPQ e ABC). Esta recta, RM, intersecta as arestas [AC] e [BC] nos pontos S e T, respectivamente. Deste modo, o quadrilátero [PQST] é a secção plana que se obtém ao seccionar o tetraedro pelo plano MPQ.



12. A construção na figura da esquerda está errada. A construção na figura da direita está correcta.

13.

- a) A construção corresponde à determinação da intersecção dos planos MNP e BCD (recta IJ).
- b) As rectas MP e DB do plano ADB intersectam-se no ponto J. Logo, J é ponto comum dos planos MNP e BCD, pois as rectas referidas são uma de cada um dos referidos planos. As rectas NP e BC do plano ABC intersectam-se no ponto I. Logo, I é ponto comum dos planos MNP e BCD, pois as rectas referidas são uma de cada um dos referidos planos. Assim, a recta IJ é a recta de intersecção dos planos MNP e BCD.
- c) Os pontos IJK são colineares, pois K é também um ponto comum dos planos MNP e BCD.

14.

- a) $\overline{IJ} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$
- b) $\overline{AI} = \overline{AJ} = \frac{\sqrt{6}}{2} a$
- c)

