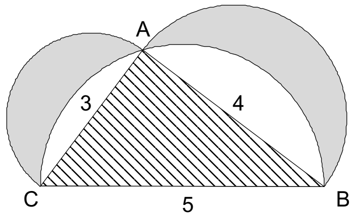
Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

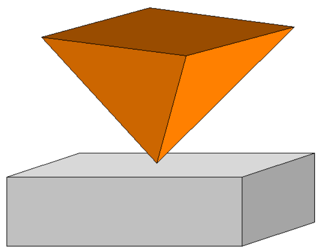
11/10/97 ***Relações métricas entre figuras e poliedros*** **10.º Ano**

Nome:____ N.º:___ Turma: ___

Observe atentamente as figuras e, sempre que possível e necessário, construa os modelos representados para encontrar com mais facilidade as respostas às perguntas formuladas. Em cada caso tente fazer uma breve descrição do modo como procedeu e da sequência de raciocínio que o conduziram às diversas respostas.

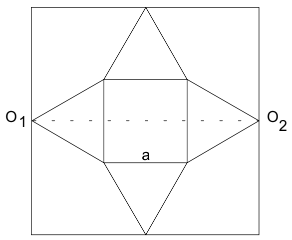


1. O triângulo [ABC] é rectângulo em A.
Mostre que a área sombreada é igual à área do triângulo.
Pode então concluir que nem sempre aparece π *para calcular áreas de figuras em que intervêm círculos.*

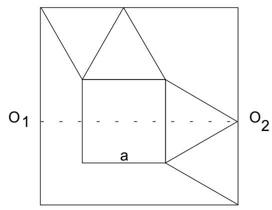


1. Suponhamos que pretendemos planear um monumento a Euclides com a forma de uma pirâmide regular invertida, cuja base seja um quadrado e as outras faces sejam triângulos equiláteros em folha de metal, sendo posteriormente as faces soldadas e pintadas.

Deseja-se que ela seja o maior possível, mas dispõe-se unicamente de uma folha de metal quadrangular com 6 m de lado.
Propõem-se dois métodos possíveis para a sua construção.



a) Primeiro método:
Designe por *a* o lado do quadrado que forma a base da pirâmide.
Calcule $\overline{O_1O_2}$ e verifique que $6 = a.(1+\sqrt{3})$.



a) Segundo método:
Designe por *a* o lado do quadrado que forma a base da pirâmide.
Calcule $\overline{O_1O_2}$ e verifique que $6 = \frac{a}{2}.(3+\sqrt{3})$.

b) Faça as duas construções. Qual é o método mais vantajoso?

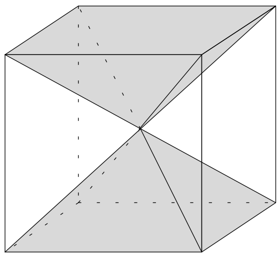
c) Consegue encontrar um método ainda melhor?

d) Terceiro método:
Considere o método apresentado nas soluções. Verifique que $6 = \frac{a}{2}.(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

e) Mostre que o volume (em m^3) da pirâmide considerada no primeiro método é dado por $V_1 = \frac{18\sqrt{2}}{5+3\sqrt{3}}$.

f) Designando por a_1 e a_3, respectivamente, os lados do quadrado nos 1.º e 3.º métodos, mostre que $\frac{a_3}{a_1} = \sqrt{2}$.

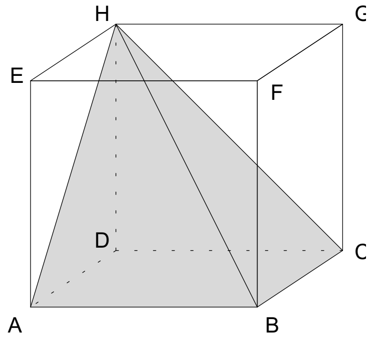
g) Relacione, justificando, os volumes das pirâmides obtidas nos primeiro e terceiro métodos (V_1 e V_3).
Determine o valor exacto de V_3 (em m^3).



3. Observe atentamente a figura ao lado.

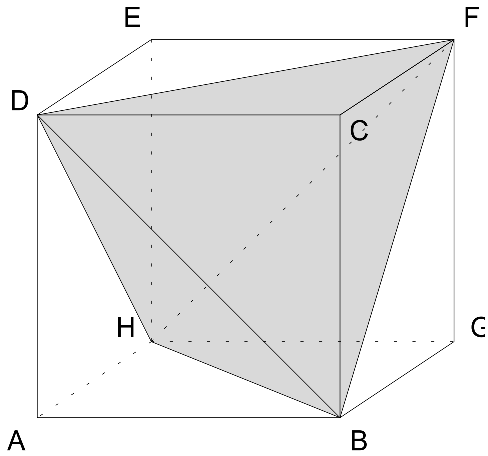
a) As quatro diagonais do cubo permitem decompô-lo em pirâmides regulares de base quadrada.
Relacione o volume de cada uma delas com o volume do cubo.

b) Se «voltássemos o sólido para fora», obtínhamos um novo sólido - o dodecaedro rômbico (*ver figura do livro, página 46*). Qual é o seu volume?



4. Considere o cubo [ABCDHEFG] e a pirâmide [ABCDH] representados na figura ao lado.

Relacione o volume da pirâmide com o volume do cubo.



5. Considere o cubo [ABCDEFGH] representado na figura ao lado.

a) Mostre que [BDHF] é um tetraedro regular.
Como são as suas faces?

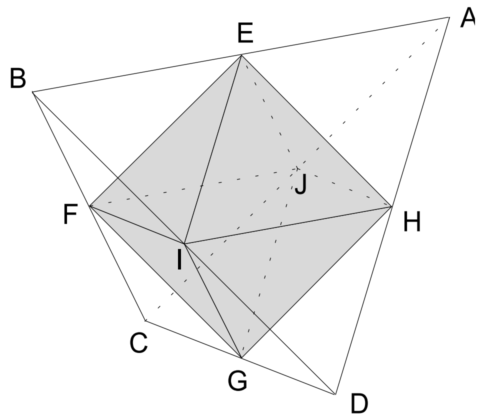
b) Quantas pirâmides congruentes com [ABHD] se encaixam com o tetraedro [BDHF] perfazendo o cubo?]

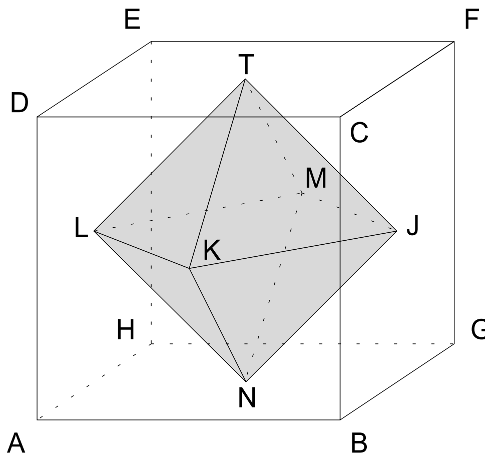
c) Relacionando os volumes do tetraedro e das pirâmides com o volume do cubo, calcule o volume do tetraedro em função da aresta *a* do cubo.
O volume do tetraedro que fracção é do volume do cubo?

d) Calcule o volume do tetraedro em função de $\overline{BH} = b$.

6. Cortando um tetraedro regular [ABCD] por planos paralelos às faces que passem pelos pontos médios das arestas, obtém-se um octaedro regular (*ver figura ao lado*).

Compare o volume do octaedro com o do tetraedro original.





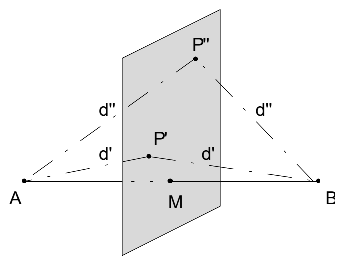
7. Na figura ao lado, considere o cubo [ABCDEFGH].
Sejam T, J, K, M e N os centros das faces do cubo.

a) Prove que [TJKLMN] é um octaedro regular.

b) Seja $\overline{AB} = a$, calcule $\overline{TJ}$ em função de *a*.

c) Mostre que o quadrilátero [JKLM] é um quadrado e que o plano JKL é o plano mediador de [TN]. Seja O o ponto de intersecção de TN com o plano JKL. Que representa O para o quadrado [JKLM]?

Nota: Chama-se **plano mediador** de um segmento de recta [AB] ao plano perpendicular a [AB] que contém o ponto médio deste segmento.
Consequentemente, qualquer ponto P do plano mediador está à mesma distância de A e de B.



d) Calcule o volume da pirâmide [TJKLM] em função de *a*.

e) Calcule o volume do octaedro regular e compare-o com o volume do cubo.

f) Compare o volume do octaedro com o volume do tetraedro referido no exercício **5**.

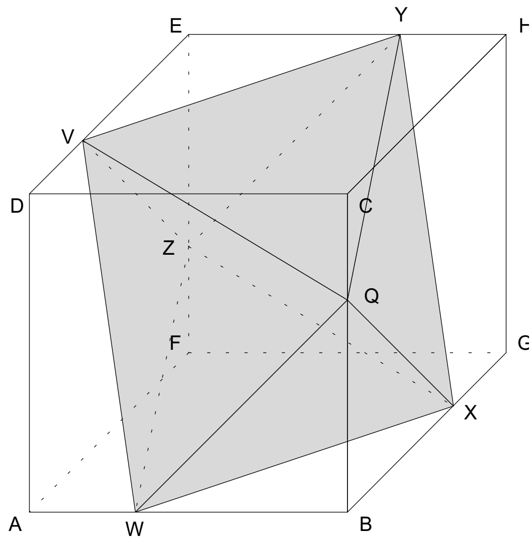
8. Considere o cubo [ABCDEFGH], representado na figura ao lado.

Sendo W, X, Y, V, Q e Z tais que:

$$\overline{AW} = \overline{GX} = \overline{HY} = \overline{DV} = \overline{CQ} = \overline{FZ} = x \, ,$$

como escolher x para que [WXYVQZ] seja um octaedro regular?

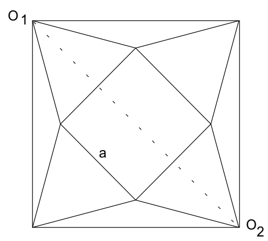
Calcule então a medida da sua aresta $\overline{WX}$ em função da aresta do cubo.



SOLUÇÕES

2.

e)



h) $\dfrac{V_3}{V_1} = 2\sqrt{2}$; $\quad V_3 = \dfrac{72}{5+3\sqrt{3}}$.

3.

a) O volume de cada uma das pirâmides é um sexto do volume do cubo.

b) Duplo do volume do cubo.

4. O volume da pirâmide é um terço do volume do cubo.

5.

b) Quatro pirâmides.

c) $V_{\text{cubo}} = V_{\text{tetraedro}} + 4 \times V_{\text{piramide}}$; $\quad V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{3}a^3$; $\quad V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{1}{3}V_{\text{cubo}}$.

d) $V_{\text{tetraedro}} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}b^3$.

6. Dado que a medida da aresta [AE] é metade da medida da aresta [AB, o volume do tetraedro [EBFI] será $\dfrac{1}{8}$ do volume do tetraedro [ABCD]. Como há quatro tetraedros congruentes com o tetraedro [EBFI], podemos concluir que $V_{\text{octaedro}} = \dfrac{1}{2}V_{\text{tetraedro}}$.

7.

b) $\overline{TJ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

d) $V_{\text{piramide}} = \dfrac{1}{12}a^3$.

e) $V_{\text{octaedro}} = 2 \times V_{\text{piramide}} = \dfrac{1}{6}a^3 = \dfrac{1}{6}V_{\text{cubo}}$.

f) É metade do volume desse tetraedro.

8. $x = \dfrac{a}{4}$; $\quad \overline{WX} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$.

O Professor