

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2002/03

Generalidades sobre funções e gráficos - II

10.º Ano

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

1. Utiliza o computador ou a máquina gráfica para visualizar os gráficos das funções abaixo indicadas.

$y_1 = x$	$f(x) = 2x$	$g(x) = 3x - 1$	$h(x) = x^2$	$y_2 = -3x^2 + 2$	$y_3 = x^3 - x$	$j(x) = 3x^3$	$l(x) = \frac{1}{x}$
-----------	-------------	-----------------	--------------	-------------------	-----------------	---------------	----------------------

- a) Para cada uma delas procura simetrias em relação:
- a1) ao eixo das ordenadas;
 - a2) à origem do referencial.
- b) Para cada uma delas calcula a imagem de valores simétricos à tua escolha. Calcula a seguir a imagem de x e de $-x$. Relaciona os resultados obtidos com a simetria verificada em a).

Informação

Uma função f diz-se **PAR** quando elementos simétricos do domínio têm a mesma imagem, isto é $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$.

Uma função f diz-se **ÍMPAR** quando elementos simétricos do domínio têm imagens simétricas, isto é $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$.

2. Considera a expressão que permite transformar graus Celcius em graus Fahrenheit: $F = \frac{9}{5}C + 32$.

Ela traduz a situação do quadro que vais completar:

C	0	5		- 50	0,1	x
F		41	14			

- a) Qual foi a expressão que obtiveste na última coluna? $F = \dots\dots\dots$, ou seja: $f : x \rightarrow y = \dots\dots\dots$
- b) Justifica que se trata de uma função e indica quais as variáveis que intervêm nesta função.
- c) Com a ajuda do computador/calculadora gráfica, traça o gráfico de f , definida no intervalo $[-25;25]$
- d) O tipo de gráfico obtido já foi estudado quando na geometria se abordou a recta. Indica as coordenadas de um ponto do segmento de recta que constitui o gráfico.
- e) Qual o domínio da função? Comprova no gráfico.
- f) Indica o contradomínio por observação do gráfico.
- g) Calcula analiticamente $f(3)$ e $f(-5)$. Verifica o resultado no gráfico. Formula a mesma questão, mas em "linguagem comum".
- h) Determina o(s) zero(s) da função. Onde se situa(m) no gráfico? Formula a mesma questão em "linguagem comum".
- i) Determina o ponto de intersecção do gráfico com o eixo dos yy . Uma das coordenadas é não nula. Que representa?

j) Usando o comando "Trace", faz leituras convenientes por forma comprovar que o declive da recta que contém o segmento de recta que define o gráfico é $\frac{9}{5}$.

k) Escreve uma equação vectorial da recta referida na alínea anterior.

3. Considera ainda a função da questão anterior.

a) Pela análise do gráfico, indica o(s) intervalo(s) onde se verifica: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.

b) Confirma analiticamente as observações efectuadas na alínea anterior.

c) No(s) intervalo(s) referido(s) em a) a função diz-se

d) A função é contínua. Justifica por palavras tuas.

e) Verifica-se que, em todo o seu domínio, se tem: $a > b \Rightarrow f(a) \dots f(b)$.

f é uma função crescente em sentido estrito no domínio se e só se

4. Considera a função f , definida por $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, e de domínio \mathbb{R} .

Traça no computador ou na calculadora gráfica o gráfico de f e a partir daí responde às questões:

Nota: Na calculadora gráfica define a "janela" $[-5;5] \times [-15;15]$.

a) Quantos zeros tem a função (ou quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$)?

b) Qual o ponto de intersecção do gráfico com o eixo dos yy ?

c) Em que intervalos (aproximadamente) a função é positiva? E negativa?

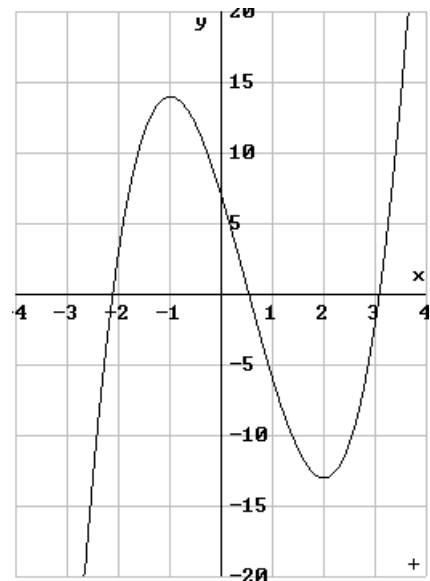
d) Lê no gráfico os valores de x a que correspondem os máximo e mínimo locais.

Em que intervalo(s) I é verdadeira a afirmação:

" $\forall a, b \in I, a > b \Rightarrow f(a) < f(b)$ "?

e) Estuda os intervalos de monotonia da função.

f) Conclui sobre a injectividade da função.



Nos exercícios 5, 6 e 7 explora o sketch GSP em:

http://www.prof2000.pt/users/amma/recursos_materiais/rec/10_anof_trab/2002_03/FT10_15.gsp

5. Considera a função definida por $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ no domínio $[-2; 3]$.

a) A partir do seu gráfico (usa o computador/calculadora gráfica e uma escala adequada) indica o seu contradomínio e os pontos de intersecção com os eixos coordenados.

b) Traça, agora, os gráficos de $g(x) = f(x) - 2$ e de $h(x) = f(x) + 3$.

b1) O que aconteceu aos gráficos de g e de h em relação ao de f ?

b2) Indica o domínio e o contradomínio de g e de h .

c) Apaga os gráficos de g e de h e sobrepõe ao gráfico de f os gráficos de $j(x) = f(x - 3)$ e de $m(x) = f(x + 1)$.

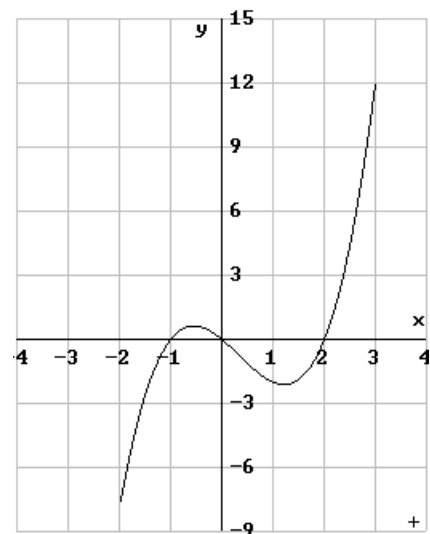
c1) O que aconteceu aos gráficos de j e de m em relação ao de f ?

c2) Indica o domínio e o contradomínio de j e de m .

d) Supondo $D_f = [a, b]$ e $D'_f = [c, d]$, generaliza as situações anteriores:

d1) Qual o domínio e o contradomínio de $r(x) = f(x) + k$, sendo k um número real?

d2) Qual o domínio e o contradomínio de $s(x) = f(x + k)$, sendo k um número real?



6. Apaga todas as funções do visor e deixa só o gráfico de f e considera o mesmo domínio.

a) Traça o gráfico de $g(x) = 2 \times f(x)$.

O que aconteceu? Seria de prever?

b) Indica o domínio, os zeros e o contradomínio de g e compara-os com os de f .

c) Sem visualizares o gráfico, indica o domínio, os zeros e o contradomínio de $h(x) = 3 \times f(x)$.

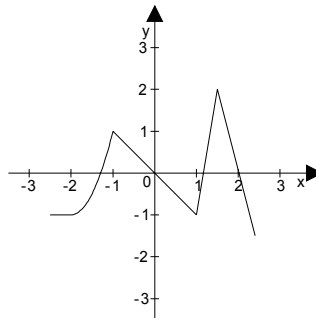
7. Considera ainda a mesma função definida por $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ no domínio $[-2; 3]$.

a) Sobrepõe-lhe o gráfico de $t(x) = -f(x)$.

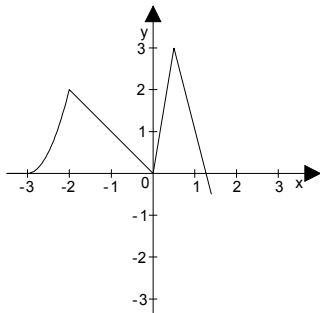
O que aconteceu?

b) Indica o domínio, os zeros e o contradomínio de $t(x) = -f(x)$.

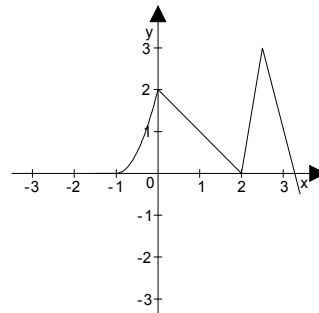
8. Se o gráfico de $y = f(x)$ for



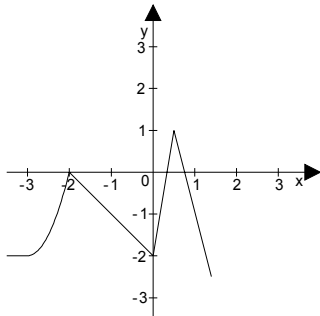
então o gráfico de $y = f(x - 1) + 1$ é:



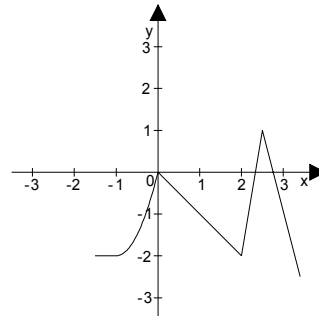
[A]



[B]



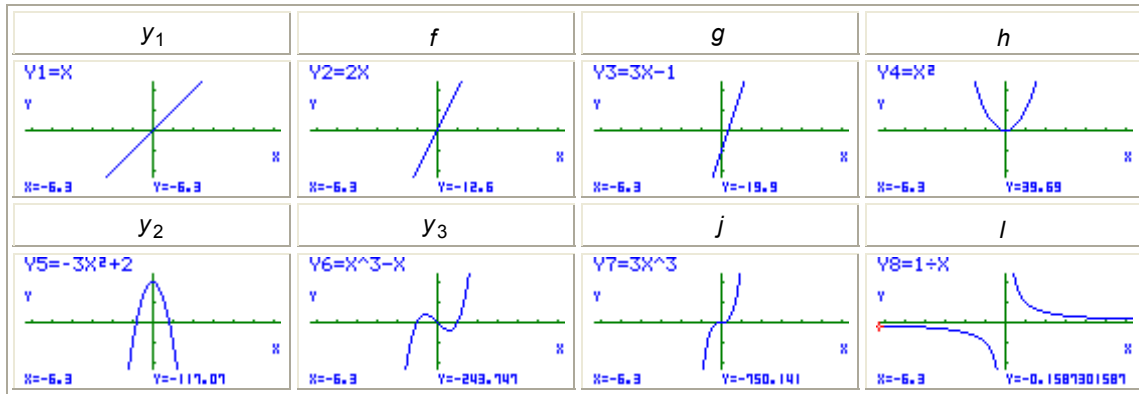
[C]



[D]

SOLUÇÕES

1.



a) Simetria em relação ao eixo Oy: h e y_2 .
Simetria em relação à origem: y_1, f, y_3, j e l .

b)

Função	-3	3	-2	2	-1	1	x	$-x$	Paridade	Simetria
y_1	-3	3	-2	2	-1	1	$y_1(x) = x$	$y_1(-x) = -x$	Ímpar	Origem
f	-6	6	-4	4	-2	2	$f(x) = 2x$	$f(-x) = -2x$	Ímpar	Origem
g	-10	8	-7	5	-4	2	$g(x) = 3x - 1$	$g(-x) = -3x - 1$	-	-
h	9	9	4	4	1	1	$h(x) = x^2$	$h(-x) = x^2$	Par	Eixo Oy
y_2	-25	-25	-10	-10	-1	-1	$y_2(x) = -3x^2 + 2$	$y_2(-x) = -3x^2 + 2$	Par	Eixo Oy
y_3	-24	24	-6	6	0	0	$y_3(x) = x^3 - x$	$y_3(-x) = -x^3 + x$	Ímpar	Origem
j	-81	81	-24	24	-3	3	$j(x) = 3x^3$	$j(-x) = -3x^3$	Ímpar	Origem
l	-1/3	1/3	-1/2	1/2	-1	1	$l(x) = \frac{1}{x}$	$l(-x) = -\frac{1}{x}$	Ímpar	Origem

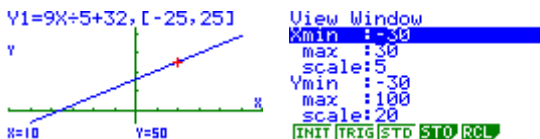
2.

C	0	5	-10	- 50	0,1	x
F	32	41	14	-58	32,18	$\frac{9}{5}x + 32$

a) $F = \frac{9}{5}x + 32$, ou seja: $f: x \rightarrow y = \frac{9}{5}x + 32$.

b) É uma função, de variáveis x (independente) e y (dependente), pois a correspondência estabelecida entre o conjunto de valores de x e o conjunto de valores de y é uma correspondência unívoca.

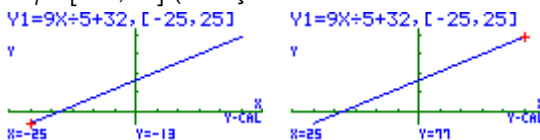
c)



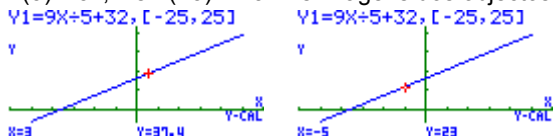
d) Por exemplo, o ponto A (10, 50).

e) $D_f = [-25, 25]$. (nota que se considerou a função definida em $[-25;25]$)

f) $D'_f = [-13, 77]$ (a função é estritamente crescente, $f(-25) = -13$ e $f(25) = 77$);

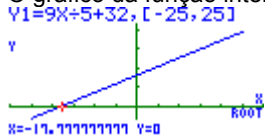


g) $f(3) = 37,4$ e $f(-5) = 23$. As imagens dos objectos 3 e -5 são, respectivamente, 37,4 e 23.

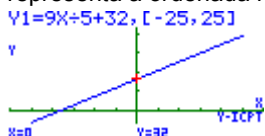


h) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{5}x + 32 = 0 \Leftrightarrow 9x = -160 \Leftrightarrow x = -\frac{160}{9} \Leftrightarrow x = -17,7$.

É a abcissa do ponto de intersecção do gráfico com o eixo Ox ("localiza-se sobre o eixo Ox").
O gráfico da função intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa $-17,7$.



i) Para $x = 0$ é $f(0) = 32$. Portanto o gráfico intersecta o eixo Oy no ponto B (0, 32). A coordenada não nula representa a ordenada na origem da função do tipo $y = mx + b$, definida em \mathbb{R} .



j) Considerando, por exemplo, os pontos A (10, 50) e B (0, 32) (alíneas d) e i)), temos $m = \frac{50 - 32}{10 - 0} = \frac{9}{5}$.

k) Por exemplo, $(x, y) = (10, 50) + k(5, 9)$, $k \in \mathbb{R}$.

3.

a) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{160}{9}, 25]$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-25, -\frac{160}{9}[$.

b) $\frac{9}{5}x + 32 > 0 \Leftrightarrow 9x > -160 \Leftrightarrow x > -\frac{160}{9}$; $\frac{9}{5}x + 32 < 0 \Leftrightarrow 9x < -160 \Leftrightarrow x < -\frac{160}{9}$.

Considerando que a função tem domínio $[-25, 25]$, obtêm-se os intervalos apresentados em a).

c) Nos intervalos referidos em a), diz-se que a função é positiva no primeiro e negativa no segundo.

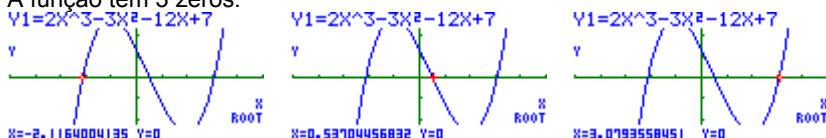
d) A função é contínua, pois é possível desenhar o seu gráfico sem qualquer interrupção (ter de levantar o lápis).

e) Verifica-se que, em todo o seu domínio, se tem: $a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

f é uma função crescente em sentido estrito no domínio se e só se $a > b \Rightarrow f(a) > f(b), \forall a, b \in D_f$.

4.

a) A função tem 3 zeros.



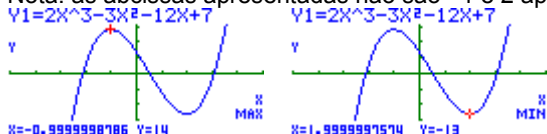
b) O ponto de intersecção com o eixo Oy é A (0, 7).



c) A função é positiva nos seguintes intervalos (aproximadamente): $]-2,12; 0,54[$ e $]3,08; +\infty[$.

A função é negativa nos seguintes intervalos (aproximadamente): $]-\infty; -2,12[$ e $]0,54; 3,08[$.

d) Nota: as abcissas apresentadas não são -1 e 2 apenas por falta de precisão da calculadora.



No intervalo $[-1, 2]$ a afirmação é verdadeira (logo, também o será em qualquer outro intervalo nele contido).

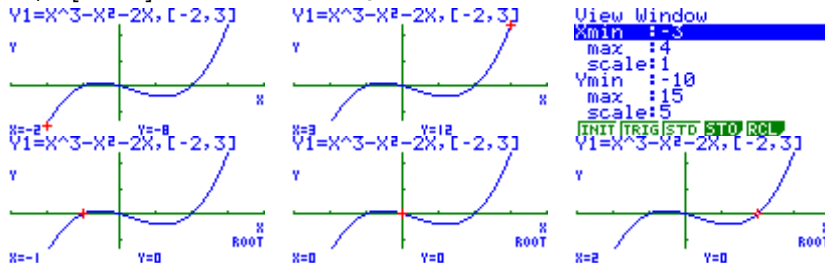
e)

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
f	\nearrow	14	\searrow	-13	\nearrow

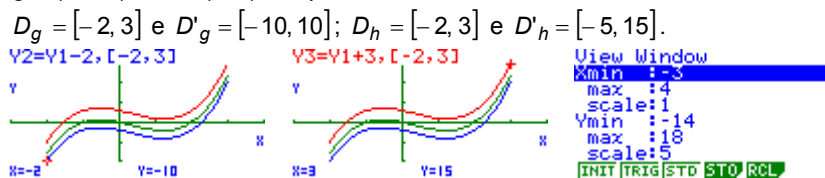
f) A função não é injectiva, pois há objectos diferentes com a mesma imagem.
 Por exemplo, designando os zeros da função por a, b e c , verifica-se que $a \neq b \wedge f(a) = f(b) = 0$.

5.

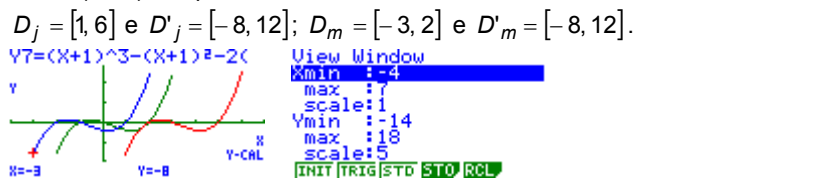
a) $D_f = [-8, 12]$; pontos de intersecção com os eixos: A $(-1, 0)$, O $(0,0)$ e B $(2, 0)$.



b) Os gráficos de g e h podem ser obtidos a partir do gráfico de f por translações associadas aos vectores $\vec{g} = (0, -2)$ e $\vec{h} = (0, 3)$, respectivamente.



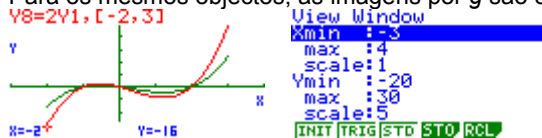
c) Os gráficos de j e m podem ser obtidos a partir do gráfico de f por translações associadas aos vectores $\vec{j} = (3, 0)$ e $\vec{m} = (-1, 0)$, respectivamente.



d) $D_r = [a, b]$ e $D'_r = [c+k, d+k]$; $D_s = [a-k, b-k]$ e $D'_s = [c, d]$.

6.

a) O gráfico de g está deformado relativamente ao de f .
 Para os mesmos objectos, as imagens por g são duplas das de f .

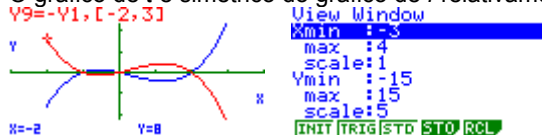


b) $D_g = D_f = [-2, 3]$; $D'_g = [-16, 24]$ e $D'_f = [-8, 12]$; os zeros de f e g são os mesmos: $-1, 0$ e 2 .

c) $D_h = D_f = [-2, 3]$; $D'_h = [-24, 36]$ e $D'_f = [-8, 12]$; os zeros de f e h são os mesmos: $-1, 0$ e 2 .

7.

a) O gráfico de t é simétrico do gráfico de f relativamente ao eixo O



b) $D_t = D_f = [-2, 3]$; $D'_t = [-12, 8]$ e $D'_f = [-8, 12]$; os zeros de f e t são os mesmos: $-1, 0$ e 2 .

8. [B] (o gráfico de $y = f(x - 1) + 1$ é a translação do gráfico de $y = f(x)$ associada ao vector $\vec{u} = (1, 1)$).