Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

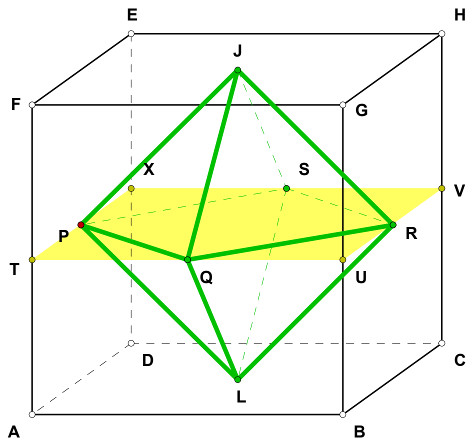
Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2009/10 — ***O Cubo e o seu Dual*** — **10.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

a)

Qualquer um dos três planos que contém 4 vértices do octaedro contém duas das suas diagonais.
Por exemplo, o plano PQR contém as diagonais [PR] e [QS].



b)

Desse corte resultam duas pirâmides quadrangulares regulares, geometricamente iguais.
No caso da secção produzida pelo plano PQR, resultam as duas pirâmides [PQRSJ] e [PQRSL].

c)

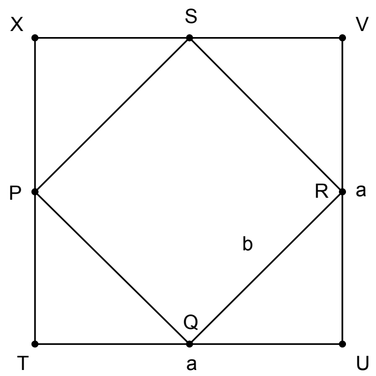
Consideremos o plano PQR, que determina como secções os quadrados (Porquê?) [TUVX] e [PQRS], respectivamente no cubo e no octaedro.
Essas secções estão representadas na figura seguinte, onde P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado [TUVX]. (Porquê?)(Justifica que [PQRS] é um quadrado)

d1)

Designado por <u>*b*</u> o comprimento da aresta do octaedro e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo [QUR], temos:

$$b = \overline{RQ} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{a^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\,.$$

(Note que $a > 0$)



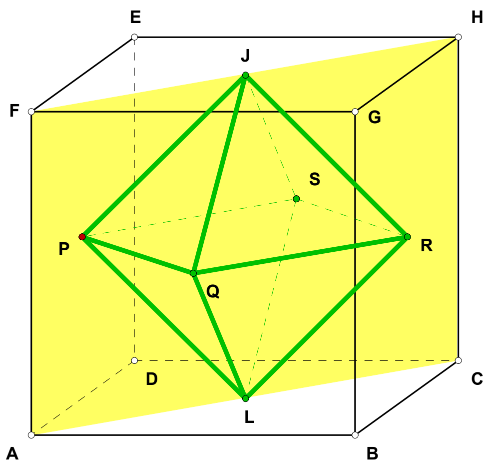
d2)

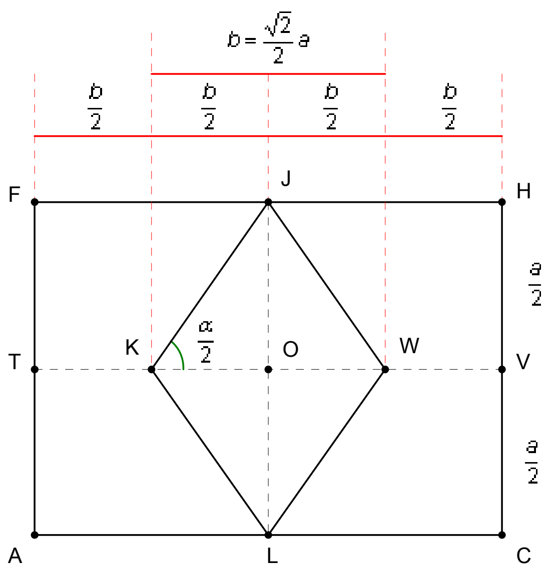
A superfície esférica circunscrita ao octaedro tem centro no centro do cubo e contém os pontos P, Q, R, S, J e L, isto é, os centros das faces do cubo.

Logo, o comprimento do seu raio é dado por $r = \frac{a}{2}$.

e)

Consideremos a secção produzida pelo plano AFH, que está ilustrada nas figuras seguintes.
Os pontos T e V são os pontos médios das arestas [AF] e [CH] do cubo; os pontos K e W são os pontos médios das arestas [PQ] e [RS] do octaedro; o ponto O é o centro do cubo.





f)

No triângulo rectângulo [KOJ], temos:

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{JO}}{\overline{KO}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{4a}{2a\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ .$$

Assim, $\frac{\alpha}{2} = tg^{-1}(\sqrt{2})$, donde $\alpha = 2 \times tg^{-1}(\sqrt{2}) \simeq 109{,}47^{\circ}$.

Portanto, a amplitude do diedro formado por duas faces do octaedro é aproximadamente 109,47º.

g)

O volume do cubo é dado por $V_{Cubo} = a^3$.

Tendo em consideração o referido na alínea b), temos:

$$\begin{aligned} V_{Octaedro} &= 2 \times V_{[PQRSJ]} \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}_{A_b} \times \underbrace{\frac{a}{2}}_{h} \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2a^2}{4} \times \frac{a}{2} \\ &= \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{V_{Octaedro}}{V_{Cubo}} = \frac{\frac{a^3}{6}}{a^3} = \frac{1}{6}$, isto é, $V_{Octaedro} = \frac{V_{Cubo}}{6} = \frac{1}{6}V_{Cubo}$.