

Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho do GAVE

Ano Lectivo 2009/10

Geometria 1

10.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

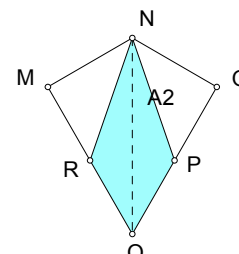
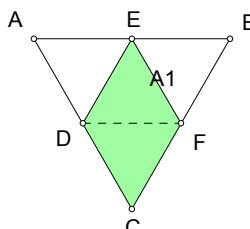
1.

Debrucemo-nos sobre a sexta parte de cada um dos hexágonos regulares geometricamente iguais de lado 2, como ilustrado na figura ao lado.

Como os hexágonos são regulares e geometricamente iguais, então são iguais as áreas das sextas partes de

cada um deles, isto é, $A_{[ABC]} = A_{[MNOQ]} = \frac{A}{6}$ (1),

designando A a área de cada um desses hexágonos.



Considerando a figura da esquerda, verificamos que o triângulo equilátero [ABC] (recorde que o lado do hexágono regular é geometricamente igual ao raio da circunferência que o circunscreve) está decomposto em quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais. Assim, podemos concluir que $A_1 = \frac{1}{2} \times A_{[ABC]} = \frac{A}{12}$ (2).

Considerando agora a figura da direita e tendo em conta que a altura de um triângulo equilátero de lado a é $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, temos:

- $\frac{A}{6} = A_{[MNOQ]} = 2 \times A_{[MNQ]} = 2 \times \frac{\overline{MN} \times \overline{MQ}}{2} = 2 \times \frac{1 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (3)

- $A_{[MNR]} = \frac{\overline{MN} \times \overline{MR}}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (4), logo $A_2 = A_{[MNOQ]} - 2 \times A_{[MNR]} = \sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (5)

- Consequentemente, por (3) e (5), será $A_2 = \frac{1}{2} A_{[MNOQ]} = \frac{A}{12}$ (6)

Assim, por (2) e (6), $A_{\text{Estrelaverde}} = 6 \times \frac{A}{12} = A_{\text{Estrelaazul}} = \frac{A}{2}$. Isto é, são iguais as áreas das duas estrelas.

ALTERNATIVA:

Como os hexágonos são regulares e geometricamente iguais, então são iguais as áreas das sextas partes de cada um deles, isto é, $A_{[ABC]} = A_{[MNOQ]} = \frac{A}{6}$ (1), designando A a área de cada um desses hexágonos.

Considerando a figura da esquerda, verificamos que o triângulo equilátero [ABC] (recorde que o lado do hexágono regular é geometricamente igual ao raio da circunferência que o circunscreve) está decomposto em quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais. Assim, podemos concluir que $A_1 = \frac{1}{2} \times A_{[ABC]} = \frac{A}{12}$ (2).

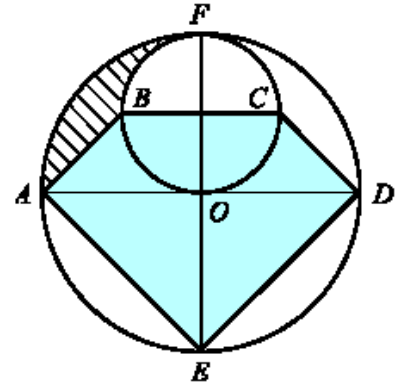
Considerando agora a figura da direita, verificamos que os segmentos de recta [NR] e [NP] são medianas dos triângulos rectângulos geometricamente iguais [NMQ] e [NOQ], respectivamente. Desta forma, cada um destes triângulos é dividido pela respectiva mediana em dois triângulos com áreas iguais. Assim, podemos concluir que $A_2 = \frac{1}{2} \times A_{[MNOQ]} = \frac{A}{12}$ (3).

Assim, por (2) e (3), $A_{\text{Estrelaverde}} = 6 \times \frac{A}{12} = A_{\text{Estrelaazul}} = \frac{A}{2}$. Isto é, são iguais as áreas das duas estrelas.

2.

a)

$$\begin{aligned} A_{[ABCDE]} &= A_{[ADE]} + A_{[ABCD]} \\ &= \frac{AD \times OE}{2} + \frac{AD + BC}{2} \times \frac{FO}{2} \\ &= \frac{4 \times 2}{2} + \frac{4 + 2}{2} \times \frac{2}{2} \\ &= 4 + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$



b)

Utilizando a mesma decomposição da alínea anterior, temos:

$$\begin{aligned} A_{[ABCDE]} &= A_{[ADE]} + A_{[ABCD]} \\ &= \frac{AD \times OE}{2} + \frac{AD + BC}{2} \times \frac{FO}{2} = \frac{2r \times r}{2} + \frac{2r + r}{2} \times \frac{r}{2} = r^2 + \frac{3r^2}{4} = \frac{7}{4}r^2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A_{\text{Tracejada}} &= \frac{A_{\text{Circulo1}}}{4} - \frac{A_{\text{Circulo2}}}{4} - \frac{A_{[ABCD]}}{2} \\ &= \frac{\pi \times 4^2}{4} - \frac{\pi \times 2^2}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{8 + 4}{2} \times 2 = 4\pi - \pi - 6 = 3\pi - 6 = 3(\pi - 2) \end{aligned}$$

3.

a)

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo [AIJ] (ver figura ao lado), temos:

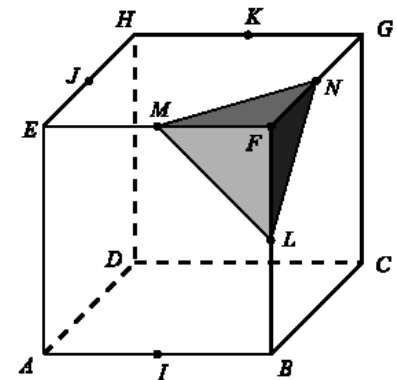
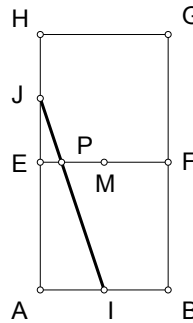
$$\overline{IJ} = \sqrt{AI^2 + AJ^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

b)

Tendo em consideração a semelhança dos triângulos rectângulos [AIJ] e [EPJ], vem:

$$\begin{aligned} \frac{EP}{AI} &= \frac{JE}{JA} \Leftrightarrow \frac{EP}{1} = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \overline{EP} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \overline{FP} = 2 - \overline{EP} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$



c)

Ver figura à direita.

d)

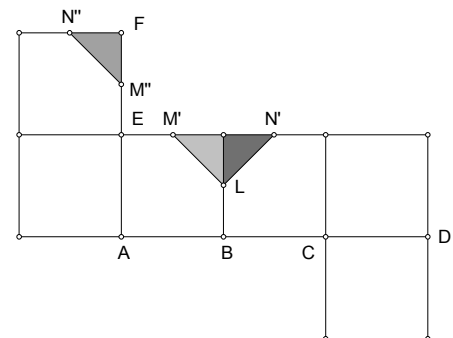
Calculando o volume da pirâmide, relativamente à base [MFL], temos:

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{MF} \times \overline{FL}}{2} \times \overline{FN} = \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

A altura do triângulo [LMN], relativamente à base [ML], é

$$h' = \sqrt{\overline{NL}^2 - \left(\frac{\overline{ML}}{2}\right)^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{pelo que a sua área é } A = \frac{\overline{ML} \times h'}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



$$\text{Assim, a altura da pirâmide, relativamente à base [LMN], é } h = \frac{V}{\frac{1}{3} \times A} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

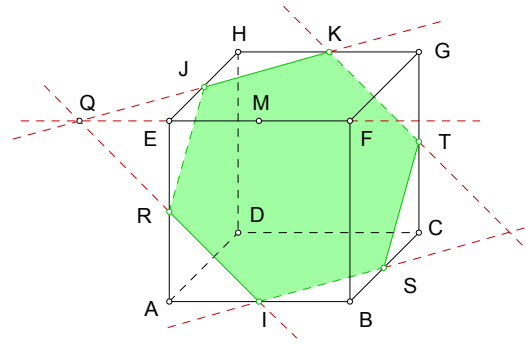
e)

e1)

Os pontos J e K pertencem simultaneamente ao plano seccionador e à face superior do cubo, logo [JK] é a secção nessa face.

As rectas JK e EF pertencem ao plano que contém a face superior do cubo, logo o ponto Q pertence a esse plano e ao plano seccionador.

Mas como o ponto Q pertence ao plano seccionador e a recta EF pertence também ao plano que contém a face frontal do cubo, então o ponto Q pertence simultaneamente ao plano seccionador e ao plano que contém a face frontal do cubo. Consequentemente, a recta QI é a intersecção do plano seccionador com o plano que contém a face frontal do cubo, sendo o segmento [RI] a secção nesta face.



Entretanto, verifica-se que os pontos R e J pertencem à face lateral esquerda do cubo e ao plano seccionador. Logo, o segmento [JR] é a secção nessa face.

Para obter as restantes secções nas últimas três faces, basta ter em conta que um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas. Consequentemente, as secções em faces paralelas serão segmentos de recta paralelos (sendo conhecido um seu extremo em cada uma dessas três faces).

A secção obtida é um hexágono regular, cujo centro é o centro do cubo (conclusão que poderá obter começando por constatar a igualdade entre os pares de triângulos rectângulos: [QMK] e [QMI], e [QEJ] e [QER]).

e2)

Como $\overline{RI} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, então o hexágono tem de perímetro $P_{\text{Hexágono}} = 6 \times \sqrt{2}$.

e3)

Consideremos o hexágono regular decomposto em seis triângulos equiláteros geometricamente iguais. A

altura de cada um deles é $h' = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ e a sua área é

$$A = \frac{\overline{ML} \times h'}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{veja a questão 1-d)). Assim, } A_{\text{Hexágono}} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

4.

a)

O volume da esfera é $V_E = \frac{4}{3} \pi \times 5^3 = \frac{500\pi}{3}$.

Seja $r' = \overline{CD}$ o raio da base dos dois cones.

O volume do sólido é dado por:

$$\begin{aligned} V_S &= \frac{1}{3} \times \pi \times (r')^2 \times \overline{BC} + \frac{1}{3} \times \pi \times (r')^2 \times \overline{CA} \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times (r')^2 \times (\overline{BC} + \overline{CA}) \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times (r')^2 \times 10 \\ &= \frac{10}{3} \times \pi \times (r')^2 \end{aligned}$$

Como $\frac{V_S}{V_E} = \frac{8}{25}$, então:

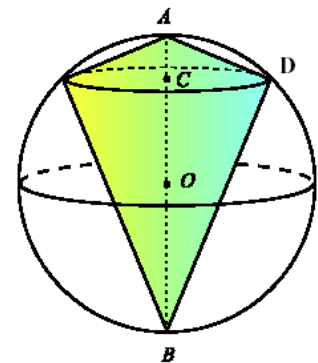
$$\frac{10}{3} \times \pi \times (r')^2 = \frac{8}{25} \times \frac{500\pi}{3} \Leftrightarrow 10 \times (r')^2 = 160$$

Logo, $r' = \overline{CD} = 4$, pois $r' > 0$.

$$\Leftrightarrow (r')^2 = 16$$

Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo [OCD], temos:

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{CD}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, \text{ c.q.m.}$$



b)

Seja D' o ponto de intersecção do plano agora considerado com a geratriz $[BD]$ e $r'' = \overline{OD'}$ o raio da base deste novo cone.

Atendendo à semelhança dos triângulos $[BCD]$ e $[BOD']$, vem:

$$\frac{\overline{OD'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{OD'}}{4} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \overline{OD'} = \frac{5}{2}.$$

Desta forma, o volume deste cone é $V'' = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 5 = \frac{1}{3} \times \pi \times \frac{25}{4} \times 5 = \frac{125\pi}{12}$.

c)

c1)

Ora, $x = \overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

c2)

Dado que o perímetro do círculo da base do cone é igual ao comprimento do arco do sector circular correspondente à superfície lateral do mesmo,

o seu comprimento $P = 2 \times \pi \times \overline{CD} = 8\pi$.

Tendo em consideração a existência de proporcionalidade directa entre o comprimento do arco do sector circular e a amplitude do sector, vem

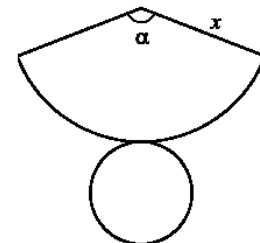
$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{8\pi}{2\pi x} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{8\pi}{2\pi \times 4\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{8\pi \times 360^\circ}{2\pi \times 4\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{360^\circ \times \sqrt{5}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 72^\circ \times \sqrt{5}$$

Logo, $\alpha \approx 161^\circ$.

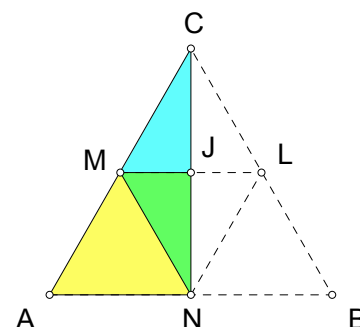


5.

Consideremos a figura ao lado, onde se acrescentaram alguns elementos face à figura fornecida. O ponto L é o ponto médio do lado $[BC]$.

Antes de mais, é conveniente salientar algumas relações (tenha em consideração a semelhança dos triângulos $[MJC]$ e $[ANC]$):

- $\overline{MJ} = \frac{1}{2} \overline{AN}$;
- $\overline{JN} = \overline{CJ} = \frac{1}{2} \overline{CN}$.



Também, como sabemos, o volume de um cone é directamente proporcional à sua altura, assim como ao quadrado do raio da base ($V_{Cone} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$).

Consideremos a rotação referida no enunciado, mas agora atendamos aos três cones gerados pelos triângulos $[AMN]$, $[JMN]$ e $[CJM]$.

Dado que o cone gerado pelo triângulo $[CJM]$ possui metade da altura e metade do raio da base do gerado pelo triângulo $[ACN]$, então o seu volume é a oitava parte do deste último, isto é, $V_{ConeAzul} = \frac{V}{8}$.

Dado que os triângulos $[CJM]$ e $[JMN]$ são geometricamente iguais, então os volumes dos cones gerados por estes triângulos são iguais. Logo, $V_{ConeVerde} = \frac{V}{8}$.

Assim, o volume (V') do cone gerado pelo triângulo $[AMN]$ verifica a seguinte relação:

$$V' = V - V_{ConeAzul} - V_{ConeVerde} = V - \frac{V}{8} - \frac{V}{8} = \frac{3}{4} V.$$

6.

a)

Par de rectas	1	2	3	4	5	6
Posição relativa	B	C	D	A	A	D

b)

Par (recta, plano)	1	2	3	4	5	6
Posição relativa	A	B	C	B	D	A

c)

c1)

Como $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_b \times h$ e sendo $V_{\text{Pirâmide}} = 144$ e $h = 12$, vem:

$$A_b = \frac{3 \times 144}{12} = 36.$$

Assim, a sua base é um quadrado com $\overline{AB} = 6$.

Designado por O o centro da base do cubo e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo [AEO], temos:

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OE}^2} = \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 12^2} = \sqrt{9 \times 2 + 144} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}.$$

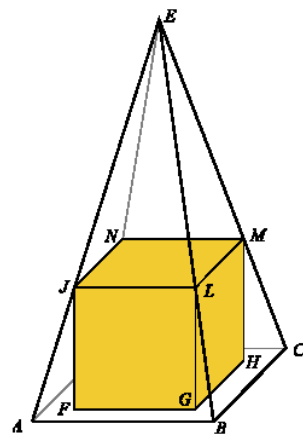
$$\text{Assim, } P = 6 + 2 \times 9\sqrt{2} = 6 + 18\sqrt{2}.$$

c2)

Considerando a semelhança dos triângulos [BEO] e [BLG] e designado por a o comprimento da aresta do cubo, temos:

$$\frac{\overline{EO}}{\overline{LG}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{GB}} \Leftrightarrow \frac{12}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a} \Leftrightarrow 36\sqrt{2} - 6\sqrt{2}a = 3\sqrt{2}a \Leftrightarrow a = 4.$$

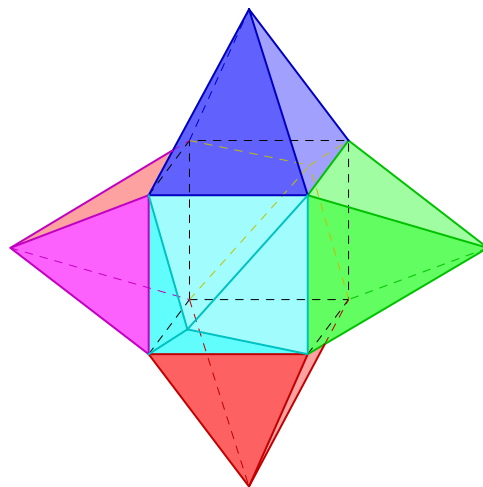
Portanto, o volume do cubo é $V_{\text{Cubo}} = 4^3 = 64$.



7.

a)

N.º de faces F	N.º de vértices V	N.º de arestas A	Verifica a relação de Euler? $F + V = A + 2$
24	14	36	Sim



b)

Designado por a o comprimento da aresta do cubo, temos:

$$V_c = a^3 \text{ e } V_p = V_c + 6 \times V_{\text{Pirâmide}} = a^3 + 6 \times \frac{1}{3} \times a^2 \times a = 3a^3.$$

$$\text{Logo, } \frac{V_p}{V_c} = 3.$$

c)

A área total do cubo é $A_c = 6a^2$.

Designado por b o comprimento da aresta lateral da pirâmide, temos:

$$b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

Assim, a altura de uma face lateral da pirâmide é $h' = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ e a área

$$\text{duma dessas faces é } A_f = \frac{a \times \frac{\sqrt{5}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}a^2. \text{ Assim, } \frac{A_p}{A_c} = \frac{24 \times \frac{\sqrt{5}}{4}a^2}{6a^2} = \sqrt{5}.$$

d)

Ora, $V_p = 192 \Leftrightarrow 3a^3 = 192 \Leftrightarrow a^3 = 64 \Leftrightarrow a = 4$. Logo, $A_p = 24 \times \frac{\sqrt{5}}{4} \times 4^2 = 96\sqrt{5} \text{ cm}^2$.

8.

a)

A afirmação é falsa, pois a intersecção de dois planos concorrentes (não coincidentes) é uma recta. No caso, é a recta que contém o ponto V e é paralela à recta AD.

b)

O raio da base do cilindro é $r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ m.

Então, o perímetro da base é $P_b = 2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\pi\sqrt{2}$ m.

Logo, o perímetro pedido é $P = 2 \times (4\pi\sqrt{2} + 8) = 8(\sqrt{2}\pi + 2)$ m, c.q.m.

c)

A aresta da base é o lado de um quadrado de diagonal $4\sqrt{2}$, logo: $\overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = (4\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 16$ e, portanto, $\overline{AB} = 4$. De facto, o comprimento da aresta da base da pirâmide é 4 m.

d)

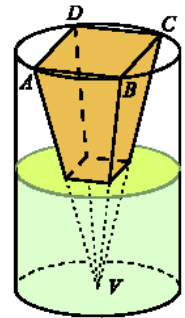
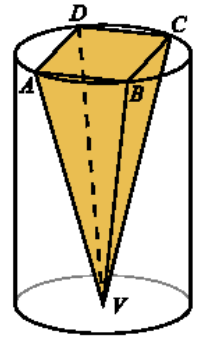
A parte submersa da pirâmide é outra pirâmide semelhante à pirâmide [ABCDV], sendo a razão de semelhança $r_s = \frac{1}{2}$. Assim, o volume submerso da pirâmide (V') verificará a seguinte relação: $V' = (r_s)^3 \times V_{[ABCDV]}$.

Logo, $V' = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{3} \times 4^2 \times 8 = \frac{16 \times 8}{8 \times 3} = \frac{16}{3} m^3$.

Como o volume do cilindro é $V_c = 8\pi \times 8 = 64\pi m^3$, então o volume de líquido vertido é

$V_l = \frac{64\pi}{2} - \frac{16}{3} = 32\pi - \frac{16}{3} m^3$.

Dado que $(32\pi - \frac{16}{3})m^3 = (32\pi - \frac{16}{3}) \times 1000 l = 95198 l$, foram vertidos 95198 litros de líquido no cilindro.



9.

a)

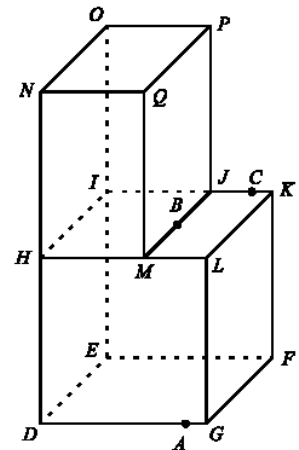
Como o volume do paralelepípedo é igual a $\frac{5}{8}$ do volume do cubo, então

$\overline{HM} = \frac{5}{8} \overline{DG}$. Admitindo $\overline{DG} = 8$, então será $\overline{HM} = \frac{5}{8} \times 8 = 5$.

Assim, podemos considerar [AB] uma diagonal espacial de um paralelepípedo de dimensões $2 \times 4 \times 8$, donde $\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 16 + 64} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.

b)

A secção produzida no sólido pelo plano ABC encontra-se representada na figura ao lado. Tenha em consideração a explicação avançada na questão 3-e1) e aplique-a a esta situação. (As rectas foram traçadas por esta ordem: p, q, r, s e t)

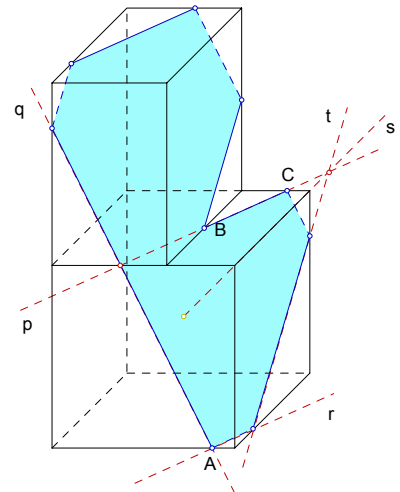


c)

As rectas HL e FL são concorrentes perpendiculares; as rectas HP e GL são não complanares e as rectas HN e DK são concorrentes oblíquas.

d)

O plano KHG determina como secção no cubo o triângulo equilátero [KHG], pois os seus lados são diagonais faciais desse cubo. Sendo equilátero, o triângulo também é equiângulo e, portanto, $\widehat{KHG} = 60^\circ$. O segmento de recta [PM] é uma diagonal do quadrado [JMQP], que o divide em dois triângulos rectângulos isósceles geometricamente iguais. Logo, $\widehat{PMQ} = 45^\circ$.



Nota: PROBLEMA 10 - relativamente à alínea a), tenho em consideração a resolução da Ficha de Trabalho "O cubo e o seu dual"; relativamente à alínea b), tenha presente a resolução da Actividade 2 "Descobrimos os Sólidos Platónicos", desenvolvida no Laboratório de Matemática (ver páginas 19 a 24 do Manual).