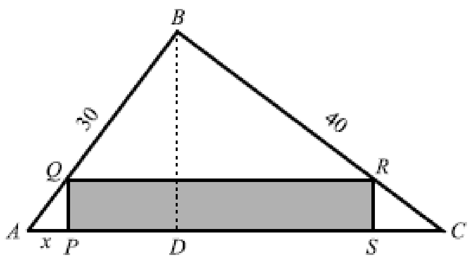
Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho do GAVE

Ano Lectivo 2009/10 *Funções 2* **10.º Ano**

Nome: ______________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.



a)

Ora, $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{30^2+40^2}=50$, c.q.m..

b)

Tendo em consideração que os três triângulos rectângulos [ABC], [ABD] e [BCD] são semelhantes, vem:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}\Leftrightarrow\frac{50}{30}=\frac{40}{\overline{BD}}\Leftrightarrow\overline{BD}=\frac{30\times40}{50}=\overline{BD}=24\ ;$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}\Leftrightarrow\frac{50}{30}=\frac{30}{\overline{AD}}\Leftrightarrow\overline{AD}=\frac{30\times30}{50}\Leftrightarrow\overline{AD}=18$$ e, consequentemente, $\overline{DC}=\overline{AC}-\overline{AD}=50-18=32$.

c)

Como os triângulos [APQ] e [ADB] são semelhantes, vem:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}\Leftrightarrow\frac{\overline{PQ}}{24}=\frac{x}{18}\Leftrightarrow\overline{PQ}=\frac{24x}{18}\Leftrightarrow\overline{PQ}=\frac{4}{3}x\ .$$

Considerando a semelhança dos triângulos [CRS] e [BCD], vem:

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{SR}}{\overline{BD}}\Leftrightarrow\frac{\overline{SC}}{32}=\frac{\frac{4}{3}x}{24}\Leftrightarrow\overline{SC}=\frac{32\times\frac{4}{3}x}{24}\Leftrightarrow\overline{SC}=\frac{32\times4}{3\times24}x\Leftrightarrow\overline{SC}=\frac{16}{9}x\ .$$

d)

d1)

Como o ponto P se desloca sobre [AD], nunca coincidindo com A, nem com D, então $D_f=\left]0,18\right[$.

d2)

Ora,

$$\begin{aligned} f(x) &= \overline{PS}\times\overline{PQ}\\ &= (50-x-\frac{16}{9}x)\times\frac{4}{3}x\\ &= \frac{450-9x-16x}{9}\times\frac{4}{3}x\\ &= \frac{1800x-100x^2}{27}\end{aligned}$$

d3)

Ora, $f(x)=\dfrac{1800x-100x^2}{27}=-\dfrac{100}{27}(x^2-18x)=-\dfrac{100}{27}\left[(x-9)^2-81\right]=-\dfrac{100}{27}(x-9)^2+300$.

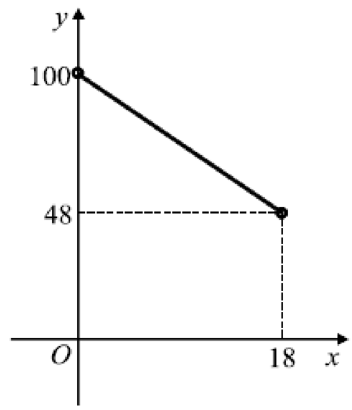
O gráfico de *f* é um arco de parábola, com a concavidade voltada para baixo, cujo vértice é $V(9,300)$.
Logo, o rectângulo de maior área é obtido para $x=9$.
Assim, as suas dimensões são: $\overline{PQ}=\dfrac{4}{3}\times9=12$ e $\overline{PS}=50-9-\dfrac{16}{9}\times9=25$.

e)

e1)
Como o ponto P se desloca sobre [AD], nunca coincidindo com A, nem com D, então $D_g =]0,18[$.

e2)
Ora,

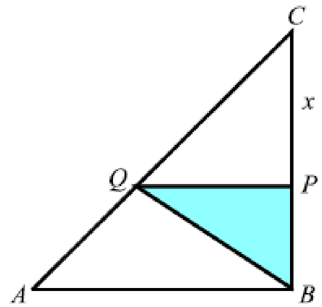
$$\begin{aligned} g(x) &= 2\times(\overline{PS}+\overline{PQ}) \\ &= 2\times(50-x-\frac{16}{9}x+\frac{4}{3}x) \\ &= 2\times\frac{450-9x-16x+12x}{9} \\ &= 100-\frac{26x}{9} \end{aligned}$$



e3)
O gráfico está representado ao lado.
(Note que as bolas são abertas.)

e4)
$D'_g =]48,100[$.

2.

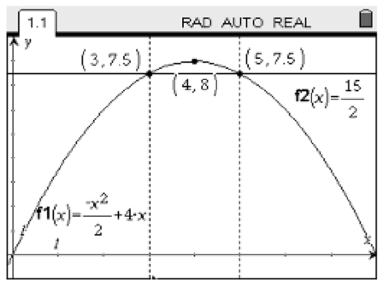


a)
Como o ponto P se desloca sobre [CB], nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto B, então $D_f =]0,8[$.

b)
Dado que os triângulos [CPQ] e [ABC] são semelhantes, então ambos são rectângulos isósceles.

Assim, vem:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\overline{BP}\times\overline{PQ}}{2} \\ &= \frac{(8-x)\times x}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2+4x \end{aligned}$$



c)
Ora, $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x=-\frac{1}{2}(x^2-8x)=-\frac{1}{2}\left[(x-4)^2-16\right]=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$.

O gráfico de *f* é um arco de parábola, com a concavidade voltada para baixo, cujo vértice é $V(4,8)$.
Logo, o máximo da função é 8, obtido para $x=4$.
Esse triângulo é rectângulo isósceles, pois, para $x=4$, tem-se $\overline{PB}=\overline{PQ}=\overline{PC}=4$ (ver figura).

d)
Ora,

$$\begin{aligned} f(x)<\frac{15}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+4x<\frac{15}{2} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x^2-8x+15}_{g(x)}>0 \end{aligned}$$

Determinemos os zeros da função auxiliar *g*, de domínio $\mathbb{R}$: $g(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-4\times15}}{2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=5$.

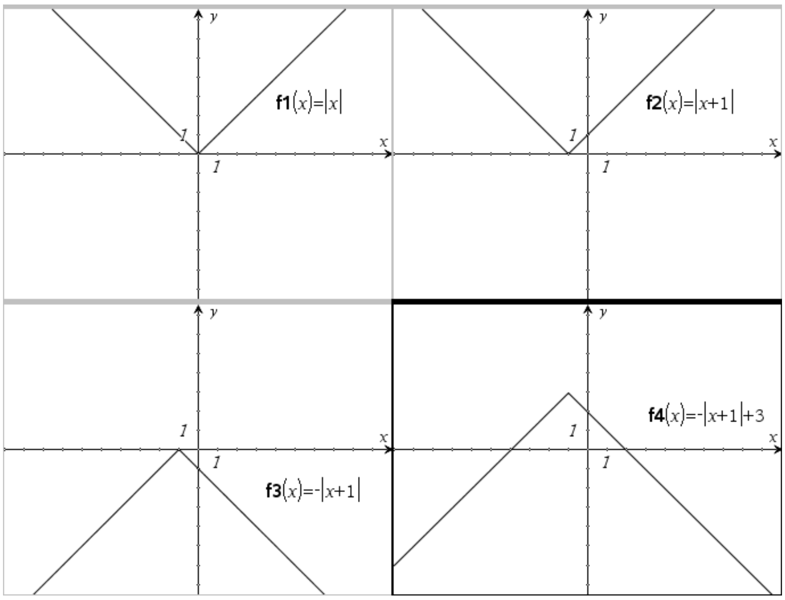
O gráfico de *g* é uma parábola, com a concavidade voltada para cima. Logo, $g(x)>0 \Leftrightarrow x\in(]-\infty,3[\,\cup\,]5,+\infty[)$.

Assim, $f(x)<\frac{15}{2} \Leftrightarrow x\in(]0,3[\,\cup\,]5,8[)$, pois $D_f=]0,8[$.

3.

a)

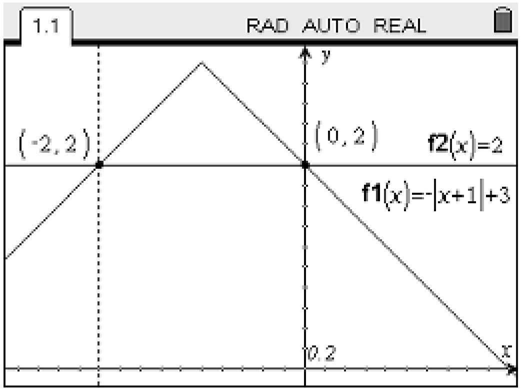
Partindo do gráfico de f_1, obtém-se o gráfico de f_2 por translação associada ao vector $\vec{u}=(-1,0)$.
O gráfico de f_3 obtém-se do gráfico de f_2 por simetria em relação ao eixo *Ox*.
Finalmente, o gráfico de $j=f_4$ obtém-se do gráfico de f_3 por translação associada ao vector $\vec{v}=(0,3)$.



b)

Ora,

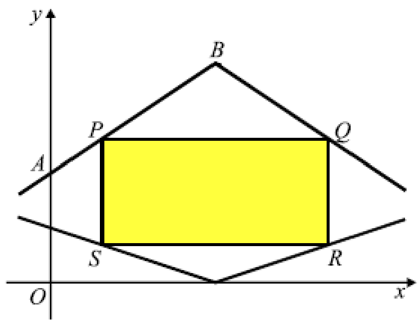
$$\begin{aligned} j(x)>2 &\Leftrightarrow -|x+1|+3>2 \\ &\Leftrightarrow |x+1|<1 \\ &\Leftrightarrow x+1>-1 \ \wedge\ x+1<1 \\ &\Leftrightarrow x>-2 \ \wedge\ x<0 \\ &\Leftrightarrow x\in\left]-2,0\right[\end{aligned}$$



c)

Ver representação gráfica ao lado, onde $f_1(x)>f_2(x)\Leftrightarrow x\in\left]-2,0\right[$.

4.



a)

Como $f(0)=-\dfrac{2}{3}|0-6|+8=-4+8=4$, então $A(0,4)$.

Como $f(6)=-\dfrac{2}{3}|6-6|+8=8$, então $B(6,8)$.

Como o ponto P se desloca sobre [AB], nunca coincidindo com o ponto B, então $D'_g=\left[0,6\right[$.

b)

Ora, $\overline{PS}=f(x)-g(x)=-\dfrac{2}{3}|x-6|+8-\dfrac{1}{3}|x-6|=-|x-6|+8$, com $x\in\left[0,6\right[$.

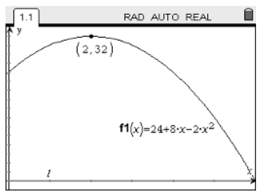
Dado que $x\in\left[0,6\right[$, então $\overline{PS}=-|x-6|+8=-(-x+6)+8=x-6+8=x+2$.

Designando por T o ponto médio de [PQ], temos: $\overline{PQ}=2\overline{PT}=2(6-x)$, com $x\in\left[0,6\right[$.

Assim, vem: $h(x)=2(6-x)(x+2)=2(6x+12-x^2-2x)=24+8x-2x^2$.

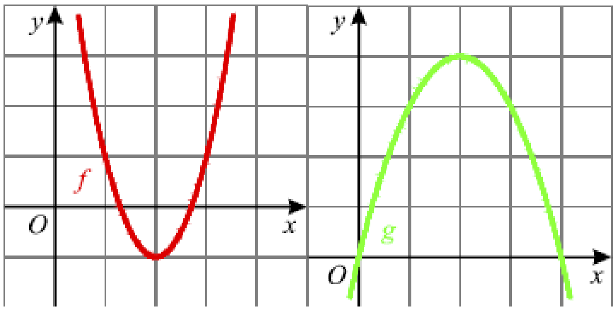
c)

Ora, $h(x)=-2x^2+8x+24=-2(x^2-4x)+24=-2\left[(x-2)^2-4\right]+24=-2(x-2)^2+32$.



O gráfico de *h* é um arco de parábola, com a concavidade voltada para baixo, cujo vértice é $V(2,32)$.
Logo, o maximizante da função é $x=2$.
Portanto, o rectângulo de maior área tem as dimensões: $\overline{PQ}=2(6-2)=8$ e $\overline{PS}=2+2=4$.

5.



a)
Ver gráfico da esquerda.

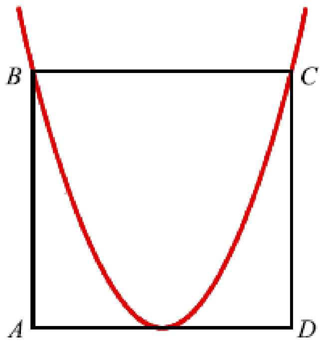
b)
Ver gráfico da direita.

c)
Relativamente ao gráfico de *f*, sabemos que o vértice da parábola é $V_f\,(2,-1)$ e que contém o ponto $A(1,1)$, por exemplo.

Assim, a função pode ser definida por uma expressão da forma $f(x)=a(x-2)^2-1$.
Dado que o ponto A pertence ao seu gráfico, então as suas coordenadas têm de verificar a expressão anterior.
Assim, temos: $f(1)=1 \Leftrightarrow a(1-2)^2-1=1 \Leftrightarrow a=2$.
Logo, a função pode ser definida por $f(x)=2(x-2)^2-1$.

Relativamente ao gráfico de *g*, sabemos que o vértice da parábola é $V_g\,(2,4)$ e que contém o ponto $O(0,0)$, por exemplo.
Assim, a função pode ser definida por uma expressão da forma $g(x)=a(x-2)^2+4$.
Dado que o ponto O pertence ao seu gráfico, então as suas coordenadas têm de verificar a expressão anterior.
Assim, temos: $g(0)=0 \Leftrightarrow a(0-2)^2+4=0 \Leftrightarrow a=-1$.
Logo, a função pode ser definida por $g(x)=-(x-2)^2+4$.

6.



a)
Para $h=0$ e $k=0$ obtém-se uma parábola geometricamente igual à considerada, com vértice na origem do referencial e *Oy* como eixo de simetria.
Essa parábola pode ser definida por $f(x)=ax^2$.

Desta forma, o ponto C tem as coordenadas $(\frac{l}{2},l)$.

Logo, $f(\frac{l}{2})=l \Leftrightarrow a\frac{l^2}{4}=l \Leftrightarrow l(a\frac{l}{4}-1)=0 \Leftrightarrow l=\frac{4}{a}$, pois $l>0$.

b)
Ora, $f(x)=4x^2-8x+7=4(x^2-2x)+7=4\left[(x-1)^2-1\right]+7=4(x-1)^2+3$.

A parábola tem por vértice o ponto $V(1,3)$, sendo $a=4$, $h=1$ e $k=3$.

Assim, como $l=\frac{4}{4}=1$, temos:

$A=V+(-\frac{1}{2},0)=(\frac{1}{2},3)$;

$D=V+(\frac{1}{2},0)=(\frac{3}{2},3)$;

$B=A+(0,1)=(\frac{1}{2},4)$;

$C=D+(0,1)=(\frac{3}{2},4)$.

c)
Sendo $A(-2,-1)$ e $C(2,3)$, então $D(2,-1)$.

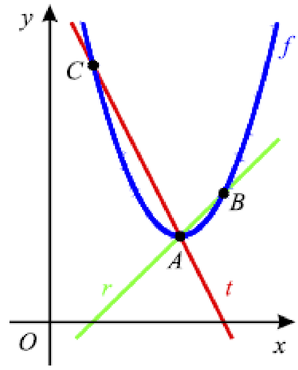
Logo, $l=\overline{AD}=4$, pelo que $a=\frac{4}{4}=1$.

O vértice da parábola é o ponto médio de [AD]: $V(\frac{-2+2}{2},\frac{-1-1}{2})=(0,-1)$. Logo, $h=0$ e $k=-1$.

Assim, a função pode ser definida por $f(x)=1(x-0)^2-1=x^2-1$.

7.

a)



Ora, $f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$.
Logo, a parábola tem por vértice o ponto $A(3,2)$.

A equação reduzida da recta *r* é da forma $y = x + b$. Como $A(3,2)$ é um ponto dessa recta, então $2 = 3 + b \Leftrightarrow b = -1$. Portanto, a equação reduzida da recta *r* é $y = x - 1$.

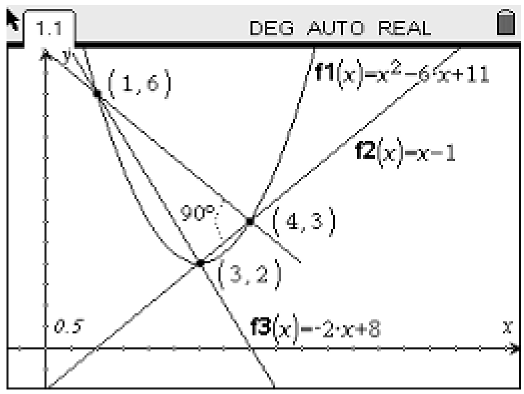
A equação reduzida da recta *t* é da forma $y = -2x + b$. Como $A(3,2)$ é um ponto dessa recta, então $2 = -2 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 8$. Portanto, a equação reduzida da recta *t* é $y = -2x + 8$.

Determinemos as coordenadas dos pontos de intersecção das rectas com a parábola:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 11 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 11 = x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 12}}{2} \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \vee x = 4 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 11 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2} \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = 3 \\ y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Portanto, $B(4,3)$ e $C(1,6)$.



Ora, $\overline{AB} = \sqrt{(4-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$,

$\overline{BC} = \sqrt{(1-4)^2 + (6-3)^2} = 3\sqrt{2}$ e

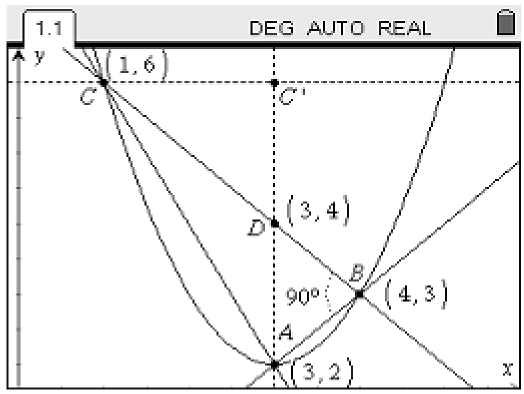
$\overline{AC} = \sqrt{(1-3)^2 + (6-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

Como $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ($20 = 2 + 18$), então o triângulo [ABC] é rectângulo em B.

b)

O eixo de simetria da parábola é a recta de equação $x = 3$.

O declive da recta BC é $m_{BC} = \dfrac{6-3}{1-4} = -1$.



Logo, a equação reduzida da recta BC é da forma $y = -x + b$. Como $C(1,6)$ é um ponto dessa recta, então $6 = -1 + b \Leftrightarrow b = 7$. Portanto, a equação reduzida da recta BC é $y = -x + 7$.

O ponto D pertence a esta recta e tem abcissa 3. Logo, a ordenada desse ponto é $y = -3 + 7 = 4$.
Portanto, $D(3,4)$.

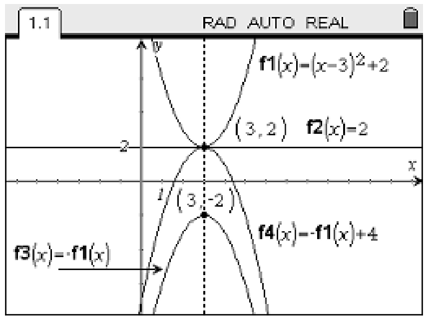
Designando por C' a projecção ortogonal do ponto C sobre a recta de equação $x = 3$, temos:

$$A_{[ACD]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{CC'}}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2.$$

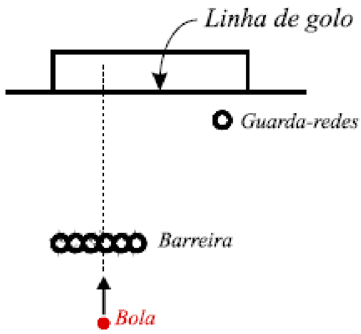
c)

A recta de equação $y = 2$ contém o vértice $A(3,2)$ da parábola que é o gráfico de *f*.

Portanto, $h(x) = -f(x) + 4 = -\left[(x-3)^2 + 2\right] + 4 = -(x-3)^2 + 2$.



8.



a)

Ora, $f(9{,}15) = 0{,}32 \times 9{,}15 - 0{,}01 \times 9{,}15^2 = 2{,}090775 > 1{,}95$.
Logo, a bola passa a barreira.

Ora, $f(25) = 0{,}32 \times 25 - 0{,}01 \times 25^2 = 1{,}75 < 2{,}44$.
Logo, a bola entra na baliza.

Vai ser golo. A bola passa por cima da barreira, pois ultrapassa-a a uma altura de, aproximadamente, 2,1 metros e atinge a linha de golo a uma altura de 1,75 metros, inferior à altura a que se encontra a barra da baliza.

b)

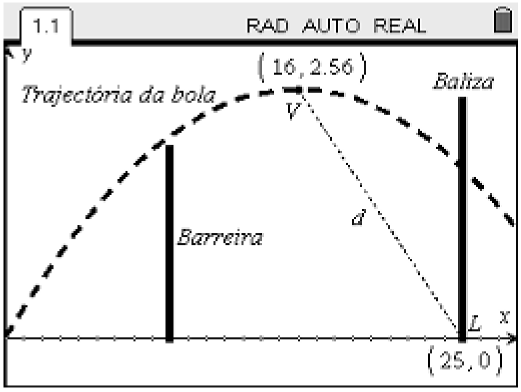
Ora, $f(x) = 0{,}32x - 0{,}01x^2 = -0{,}01(x^2 - 32x) = -0{,}01\left[(x-16)^2 - 256\right] = -0{,}01(x-16)^2 + 2{,}56$.

O gráfico de *f* é um arco de parábola, com a concavidade voltada para baixo, cujo vértice é $V(16; 2{,}56)$.
Logo, a bola atinge a altura máxima de 2,56 metros.

c)

Quando a bola atinge a altura máxima, esta localiza-se na posição $V(16; 2{,}56)$.
Dado que o plano da trajectória da bola é perpendicular à linha de golo, a distância da bola à linha de golo, nesse instante, é igual a distância da bola ao ponto $L(25, 0)$.

Ora, $d = \overline{VL} = \sqrt{(25-16)^2 + (2{,}56 - 0)^2} \approx 9{,}4$.
Quando a bola atinge a altura máxima, encontra-se aproximadamente a 9,4 metros da linha de golo.



FIM