Matemática A

Itens – 10.º Ano de Escolaridade

No Teste intermédio, que se irá realizar no dia 5 de Maio de 2010, os itens de grau de dificuldade mais elevado poderão ser adaptações de alguns dos itens que a seguir se apresentam.

1. Na figura 1, estão representadas, num referencial o.n. xOy, as rectas r e s, de equações $y = 2x - 4$ e $y = -x + 2$, respectivamente.

Estas duas rectas intersectam-se no ponto I

Um ponto P desloca-se sobre a recta r e um ponto Q desloca-se sobre a recta s, acompanhando o movimento do ponto P, de forma que P e Q tenham sempre abcissas iguais.

Designemos por a a abcissa do ponto P

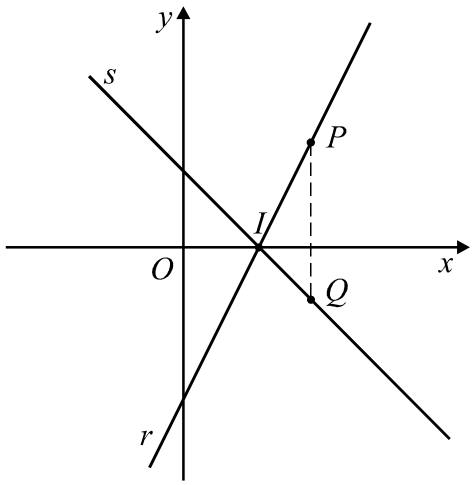

Figura 1

1.1. Mostre que a distância d de P a Q é dada, em função de a, por $d(a) = |3a - 6|$

1.2. Determine as coordenadas dos pontos P e Q para os quais se tem $\overline{PQ} = 3$

1.3. Determine os valores de a para os quais o comprimento da circunferência de diâmetro $[PQ]$ é superior a 12π

1.4. Verifique que a área A do triângulo $[PQI]$ é dada, em função de a, por

$$A(a) = \frac{3}{2}(a-2)^2 \qquad (a \neq 2)$$

1.5. Considere que um outro ponto, T, se desloca sobre a recta s, acompanhando também o movimento do ponto P, de forma que P e T tenham sempre ordenadas iguais.

1.5.1. Exprima as coordenadas do ponto T, em função de a

1.5.2. Mostre que, para cada valor de a, diferente de 2, a área do triângulo $[PQT]$ é tripla da área do triângulo $[PQI]$

2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

2.1. Diz-se que uma recta é tangente a uma parábola se, não sendo paralela ao eixo de simetria da parábola, a intersecta num único ponto.

Mostre que a recta de equação $y = -2x + 7$ é tangente ao gráfico da função g e indique as coordenadas do ponto de tangência.

2.2. Na figura 2, estão representadas, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e a recta r, que é o eixo de simetria desse gráfico.

Os pontos A, B, P e Q pertencem ao gráfico da função.

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao eixo Ox
- o ponto P tem abcissa $1+a$, com $a \in [0,2[$
- o ponto Q tem ordenada igual à do ponto P

Seja T a função que, a cada valor de a, faz corresponder a área da região sombreada.

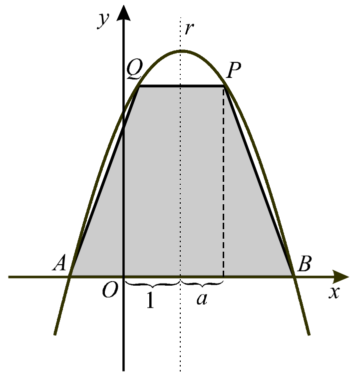

Figura 2

2.2.1. Mostre que a ordenada do ponto P é dada, em função de a, por $4 - a^2$

2.2.2. Mostre que $T(a) = 8 + 4a - 2a^2 - a^3$, $a \in]0,2[$

2.2.3. Se $a = 0$, o ponto Q coincide com o ponto P

Identifique, nesse caso, a forma da região sombreada e verifique que a sua área ainda é dada pela expressão $8 + 4a - 2a^2 - a^3$

2.2.4. Determine o valor de a para o qual a área da região sombreada é máxima, recorrendo às capacidades da sua calculadora.

Apresente o valor de a arredondado às centésimas.

Apresente o(s) gráfico(s) que visualizou na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s).

3. Nas figuras 3 e 4, estão representados dois recipientes de forma cúbica, feitos de material transparente de espessura desprezável, nos quais se pode introduzir um líquido. Dentro de cada cubo, está um cone maciço.

No recipiente A, a base do cone está inscrita na face superior do cubo, e o vértice coincide com o centro da face inferior.

No recipiente B, a base do cone está inscrita na face inferior do cubo, e o vértice coincide com o centro da face superior.

A aresta de cada um dos cubos mede 1 metro.

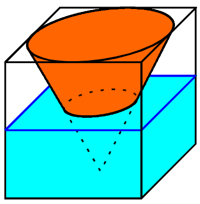

Figura 3 - Recipiente A

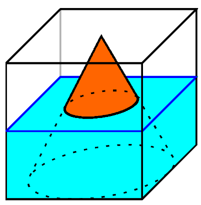

Figura 4 - Recipiente B

3.1. Determine o volume do líquido existente no recipiente A, quando o líquido atinge, nesse recipiente, 50 centímetros de altura.

Apresente o resultado em litros, arredondado às décimas.

3.2. Determine o volume do líquido existente no recipiente B, quando o líquido atinge, nesse recipiente, 60 centímetros de altura.

Apresente o resultado em centímetros cúbicos, arredondado às unidades.

3.3. Seja f a função que, à altura x (em metros) do líquido no recipiente A, faz corresponder o volume (em metros cúbicos) do líquido nesse recipiente, e seja g a função que, à altura x (em metros) do líquido no recipiente B, faz corresponder o volume (em metros cúbicos) do líquido nesse recipiente.

3.3.1. Considere a afirmação: «*As funções* f *e* g *têm o mesmo domínio e o mesmo contradomínio*».

Justifique esta afirmação, indicando o domínio e o contradomínio de f e de g

3.3.2. Mostre que $f(x) = x - \frac{\pi}{12}\, x^3$

3.3.3. Admita que o recipiente A está vazio. Introduzem-se 500 litros de líquido nesse recipiente.

Determine a altura que o líquido atinge, recorrendo às capacidades da sua calculadora.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

3.3.4. Seja $k \in D'_f$ e sejam a e b as soluções das equações $f(x) = k$ e $g(x) = k$, respectivamente.

Justifique que $b \geq a$

4. Na figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$, e o quadrilátero $[OABC]$

Sabe-se que :

- os pontos A, C e D têm ordenada 1
- o ponto D tem abcissa $-\frac{1}{2}$
- o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

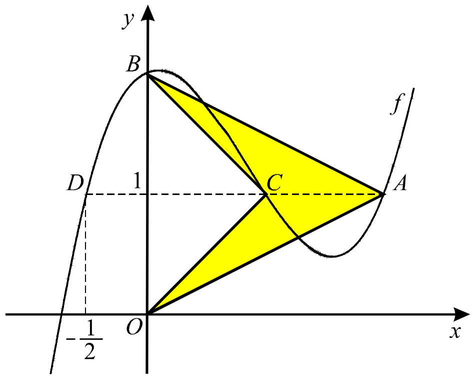

Figura 5

Resolva os itens seguintes, **sem recorrer à calculadora**.

4.1. Indique, sem efectuar a divisão, o resto da divisão inteira do polinómio $f(x)$ pelo binómio $x + \frac{1}{2}$. Justifique a sua resposta.

4.2. Mostre que a área do quadrilátero $[OABC]$ é dada por $\frac{\overline{AC} \times \overline{OB}}{2}$

4.3. Determine a área do quadrilátero $[OABC]$

5. Na figura 6, estão representadas graficamente três funções, f, g e h, todas de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- a função f é definida pela expressão $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
- o gráfico da função g é uma parábola que passa na origem do referencial;
- o gráfico da função h é uma recta paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares;
- os pontos A e B pertencem aos gráficos das três funções;
- o ponto A tem ordenada 0
- o ponto B tem abcissa 1

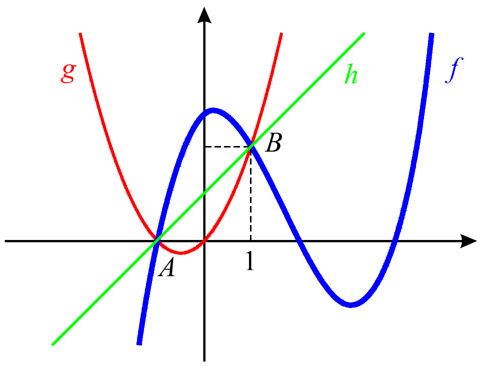

Figura 6

5.1. Defina analiticamente a função h, depois de determinar a ordenada do ponto B

5.2. Defina analiticamente a função g, depois de determinar a abcissa do ponto A

5.3. Determine o conjunto solução da inequação $f(x) > 0$, sem recorrer à calculadora.

5.4. A equação $f(x) = g(x)$ tem três soluções, sendo uma delas maior do que 1

Determine essa solução, utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora.

6. Na figura 7, está representado, num referencial o.n. xOy, o gráfico da função f, de domínio $[0,3]$, definida por $f(x) = 4 - (x-1)^2$

A cada ponto Q pertencente ao gráfico da função f, com abcissa diferente de zero e diferente de três, correspondem um ponto P, no eixo Ox, e um ponto R, no eixo Oy, tais que $[OPQR]$ é um rectângulo.

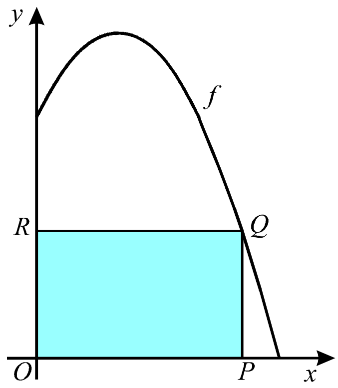

Figura 7

6.1. Determine as coordenadas do ponto Q para o qual o rectângulo $[OPQR]$ é um quadrado.

6.2. Seja $\overline{OP} = b$

Mostre que a área A do rectângulo $[OPQR]$ pode ser dada, em função de b, por $A(b) = -b^3 + 2b^2 + 3b \quad (b \in]0,3[)$

6.3. Determine as coordenadas do ponto Q a que corresponde o rectângulo de maior área.

Use a calculadora gráfica e apresente as coordenadas arredondadas às centésimas.

Nota: sempre que arredondar um valor intermédio, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

6.4. O número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é usualmente representado por ϕ e tem o nome de *número de ouro* ou *número da divina proporção*.

Seja D o ponto do gráfico da função f cuja abcissa é ϕ

Sejam B e C os pontos do gráfico de f que pertencem aos eixos coordenados.

Mostre que o triângulo $[BCD]$ é rectângulo.