Matemática A

Itens – 10.º Ano de Escolaridade

No Teste intermédio, que se irá realizar no dia 5 de Maio de 2010, os itens de grau de dificuldade mais elevado poderão ser adaptações de alguns dos itens que a seguir se apresentam.

1. Na figura 1, está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$ cujos catetos, $[AB]$ e $[BC]$, medem, respectivamente, 30 e 40 unidades de comprimento.

O segmento $[BD]$, representado a ponteado, é a altura do triângulo relativa à hipotenusa.

Considere que um ponto P se desloca sobre $[AD]$, nunca coincidindo com A, nem com D

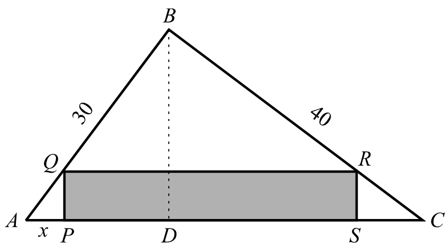

Figura 1

Os pontos Q, R e S acompanham o movimento do ponto P, de tal forma que, para cada posição do ponto P, $[PQRS]$ é um rectângulo.

Sabe-se que:

- o segmento $[PS]$ está contido em $[AC]$
- os pontos Q e R pertencem a $[AB]$ e a $[BC]$, respectivamente.

Resolva os itens seguintes, utilizando exclusivamente métodos analíticos. Pode utilizar a calculadora, para efectuar cálculos numéricos.

1.1. Mostre que $\overline{AC} = 50$

1.2. Mostre que $\overline{BD} = 24$, $\overline{AD} = 18$ e $\overline{DC} = 32$

1.3. Seja x a distância do ponto A ao ponto P

Mostre que $\overline{PQ} = \frac{4}{3}\, x$ e que $\overline{SC} = \frac{16}{9}\, x$

1.4. Seja f a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área do rectângulo $[PQRS]$

1.4.1. Qual é o domínio da função f ?

1.4.2. Mostre que $f(x) = \dfrac{1800\,x - 100\,x^2}{27}$

1.4.3. Quais são as dimensões do rectângulo que tem maior área?

1.5. Seja g a função que, a cada valor de x, faz corresponder o perímetro do rectângulo $[PQRS]$

1.5.1. Qual é o domínio da função g?

1.5.2. Mostre que $g(x) = 100 - \frac{26}{9}\, x$

1.5.3. Represente graficamente a função g

1.5.4. Qual é o contradomínio da função g ?

2. Na figura 2, está representado o triângulo rectângulo isósceles $[ABC]$

Tem-se $\overline{AB} = \overline{BC} = 8$

Um ponto P desloca-se sobre o lado $[CB]$, nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto B

Um ponto Q desloca-se sobre o lado $[AC]$, acompanhando o movimento do ponto P, de forma que $[QP]$ seja sempre paralelo a $[AB]$

Seja f a função que, ao comprimento x do segmento $[CP]$, faz corresponder a área do triângulo rectângulo $[PBQ]$

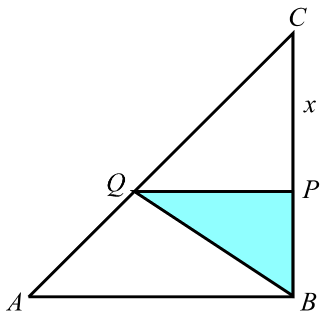

Figura 2

2.1. Indique o domínio da função f

2.2. Mostre que a função f é definida por $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$

2.3. Determine o máximo da função f

Como classifica, quanto aos lados, o triângulo $[PBQ]$ que tem maior área? Justifique.

2.4. Determine os valores de x para os quais a área do triângulo $[PBQ]$ é inferior a $\frac{15}{2}$

3. Considere a função j, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $j(x) = -|x+1| + 3$

3.1. Construa o gráfico da função j a partir do gráfico da função definida por $y = |x|$

Caracterize as sucessivas transformações que permitem obter o gráfico da função j a partir do gráfico da função definida por $y = |x|$

3.2. Resolva analiticamente a inequação $j(x) > 2$

3.3. Resolva graficamente a inequação $j(x) > 2$

4. Na figura 3, estão parcialmente representados, num referencial o.n. xOy, os gráficos das funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por $f(x) = -\frac{2}{3}|x-6|+8$ e $g(x) = \frac{1}{3}|x-6|$

Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f :

- A é o ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas;
- B é o ponto do gráfico que tem maior ordenada.

Seja P um ponto que se desloca sobre $[AB]$, nunca coincidindo com o ponto B

Para cada posição do ponto P, considere:

- o ponto Q, sobre o gráfico da função f, de modo que a recta PQ seja paralela ao eixo das abcissas;

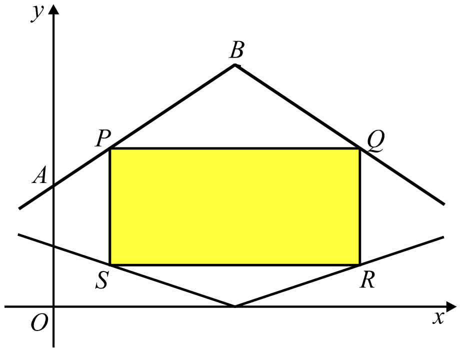

Figura 3

- os pontos R e S, sobre o gráfico da função g, de modo que $[PQRS]$ seja um rectângulo.

Seja x a abcissa do ponto P e seja h a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área do rectângulo $[PQRS]$

4.1. Qual é o domínio da função h ?

4.2. Mostre que $h(x) = 24 + 8x - 2x^2$

4.3. Determine as dimensões do rectângulo que tem maior área.

5. Na figura 4 e na figura 5, estão representações gráficas de duas funções quadráticas, f e g, em referenciais o.n. cujos eixos se ocultaram. A unidade, em qualquer dos referenciais, é o lado da quadrícula.

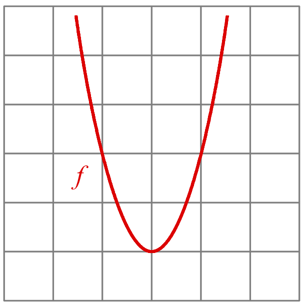

Figura 4

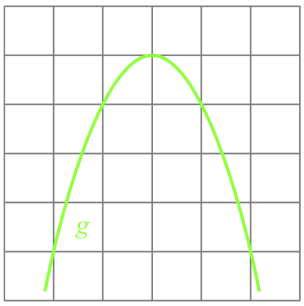

Figura 5

5.1. Desenhe o referencial na figura 4, sabendo que a recta de equação $x = 2$ é eixo de simetria da parábola e que o contradomínio da função é $[-1, +\infty[$

5.2. Desenhe o referencial na figura 5, sabendo que:

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, 4]$$

5.3. Defina analiticamente as funções f e g, considerando os referenciais que desenhou.

6. Para cada número real positivo a, para cada número real h e para cada número real k, $f(x) = a(x-h)^2 + k$ define uma função, cujo gráfico é, como sabemos, uma parábola.

Na figura 6, estão representados, num referencial o.n. xOy, cujos eixos se ocultaram, parte de uma parábola e o quadrado $[ABCD]$

O vértice da parábola é o ponto médio de $[AD]$, e os vértices B e C do quadrado são pontos da parábola.

Seja l a medida do lado do quadrado.

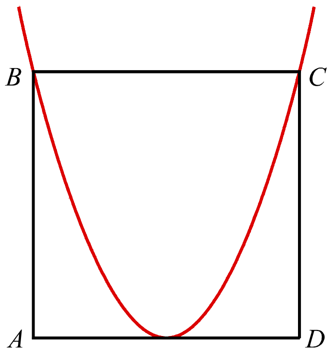

Figura 6

6.1. Mostre que $l = \dfrac{4}{a}$

6.2. Para certos valores de a, de h e de k, a função f pode ser definida por $f(x) = 4x^2 - 8x + 7$

Determine, para este caso, as coordenadas dos vértices do quadrado.

6.3. Determine uma expressão para $f(x)$, no caso em que se tem $A(-2,-1)$ e $C(2,3)$

7. Na figura 7, estão parcialmente representadas, num referencial o.n. xOy :

- uma parábola, que é o gráfico da função f definida por $f(x) = x^2 - 6x + 11$, e cujo vértice é o ponto A
- a recta r, que passa no vértice da parábola e tem declive 1
- a recta t, que passa no vértice da parábola e tem declive -2

Tem-se ainda que:

- a recta r e a parábola também se intersectam no ponto B
- a recta t e a parábola também se intersectam no ponto C

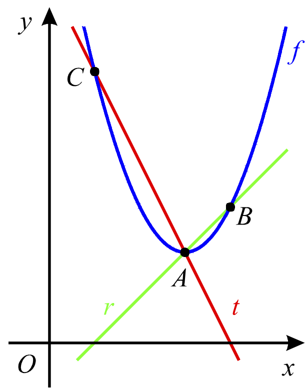

Figura 7

7.1. Mostre que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo.

7.2. Seja D o ponto do segmento $[CB]$ que pertence ao eixo de simetria da parábola.

Determine a área do triângulo $[ACD]$

7.3. Seja h a função cujo gráfico é simétrico do gráfico da função f em relação à recta de equação $y = 2$

Determine $h(x)$

8. Num jogo de futebol, vai ser cobrado um livre, a 25 metros da baliza (ver figura 8).

A barreira está à distância regulamentar de 9,15 metros da bola.

O plano da trajectória da bola é perpendicular à linha de golo.

A bola pode não passar a barreira ou pode passar por cima dela. Se passar por cima da barreira, a bola segue na direcção da baliza, fora do alcance do guarda-redes.

Admita que só pode acontecer uma das quatro situações seguintes:

- a bola não passa a barreira;
- a bola sai por cima da barra da baliza;
- a bola bate na barra da baliza;
- a bola entra na baliza.

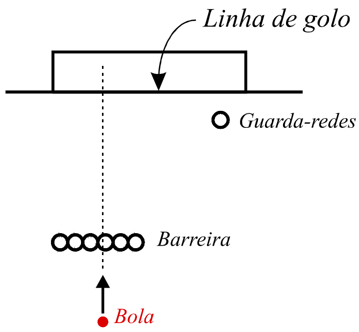

Figura 8

Na barreira, o jogador mais alto tem 1,95 metros de altura.

A barra da baliza está a 2,44 metros do chão.

Admita que, depois de rematada, a bola descreve um arco, de tal modo que a sua altura, relativamente ao solo, medida em metros, é dada por

$$f(x) = 0{,}32\,x - 0{,}01\,x^2$$

sendo x a distância, em metros, da projecção da bola no solo ao local onde ela é rematada (ver figura 9).

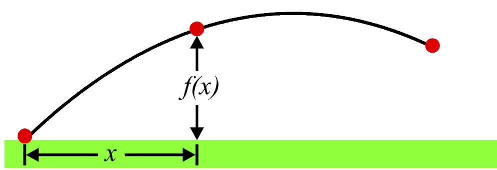

Figura 9

Resolva os itens seguintes, utilizando exclusivamente métodos analíticos. Pode utilizar a calculadora, para efectuar cálculos numéricos.

8.1. É golo? Justifique a sua resposta.

8.2. Qual é a altura máxima atingida pela bola?

8.3. A que distância da linha de golo está a bola, quando atinge a altura máxima?

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.