

Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática A

Ano Lectivo 2004/05

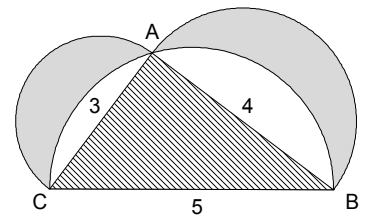
Relações métricas entre figuras e poliedros

10.º Ano

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

Observe atentamente as figuras e, sempre que possível e necessário, construa os modelos representados para encontrar com mais facilidade as respostas às perguntas formuladas. Em cada caso tente fazer uma breve descrição do modo como procedeu e da sequência de raciocínio que o conduziram às diversas respostas.

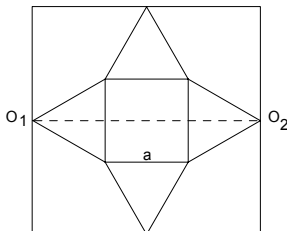
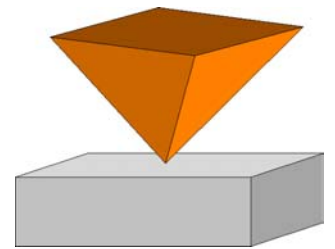
1. O triângulo [ABC] é rectângulo em A.
Mostre que a área sombreada é igual à área do triângulo.
Pode então concluir que nem sempre aparece π para calcular áreas de figuras em que intervêm círculos.



2. Suponhamos que pretendemos planear um monumento a Euclides com a forma de uma pirâmide regular invertida, cuja base seja um quadrado e as outras faces sejam triângulos equiláteros em folha de metal, sendo posteriormente as faces soldadas e pintadas.

Deseja-se que ela seja o maior possível, mas dispõe-se unicamente de uma folha de metal quadrangular com 6 m de lado.

Propõem-se dois métodos possíveis para a sua construção.



a) Primeiro método:

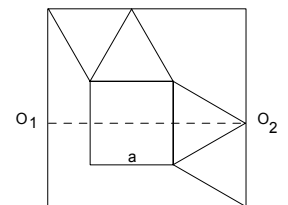
Designe por a o lado do quadrado que forma a base da pirâmide.

Calcule $\overline{O_1O_2}$ e verifique que $6 = a \cdot (1 + \sqrt{3})$.

b) Segundo método:

Designe por a o lado do quadrado que forma a base da pirâmide.

Calcule $\overline{O_1O_2}$ e verifique que $6 = \frac{a}{2} \cdot (3 + \sqrt{3})$.



- c) Faça as duas construções. Qual é o método mais vantajoso?

- d) Consegue encontrar um método ainda melhor?

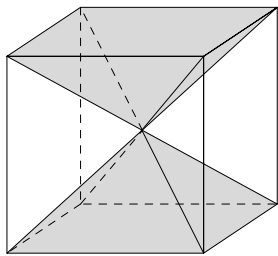
e) Terceiro método:

Considere o método apresentado nas soluções. Verifique que $6 = \frac{a}{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

- f) Mostre que o volume (em m^3) da pirâmide considerada no primeiro método é dado por $V_1 = \frac{18\sqrt{2}}{5 + 3\sqrt{3}}$.

- g) Designando por a_1 e a_3 , respectivamente, os lados do quadrado nos 1.º e 3.º métodos, mostre que $\frac{a_3}{a_1} = \sqrt{2}$.

- h) Relacione, justificando, os volumes das pirâmides obtidas nos primeiro e terceiro métodos (V_1 e V_3).
Determine o valor exacto de V_3 (em m^3).

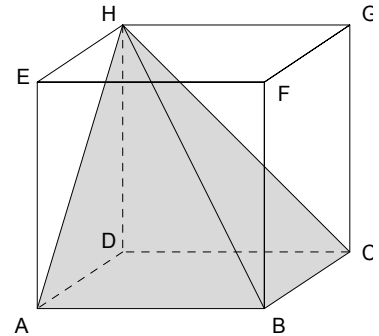
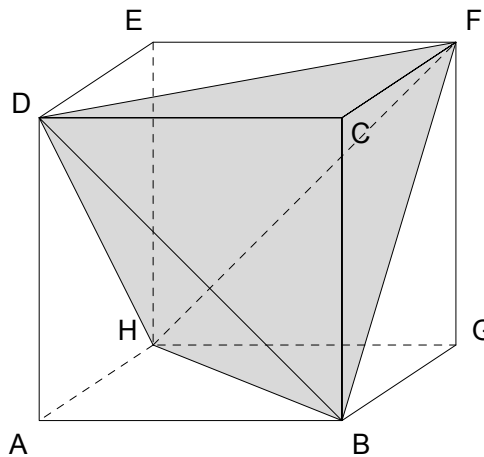


3. Observe atentamente a figura ao lado.

- As quatro diagonais do cubo permitem decompô-lo em pirâmides regulares de base quadrada. Relacione o volume de cada uma delas com o volume do cubo.
- Se «voltássemos o sólido para fora», obtínhamos um novo sólido - o dodecaedro rômico (ver figura do livro, página 92). Qual é o seu volume?

4. Considere o cubo [ABCDHEFG] e a pirâmide [ABCDH] representados na figura ao lado.

Relacione o volume da pirâmide com o volume do cubo.

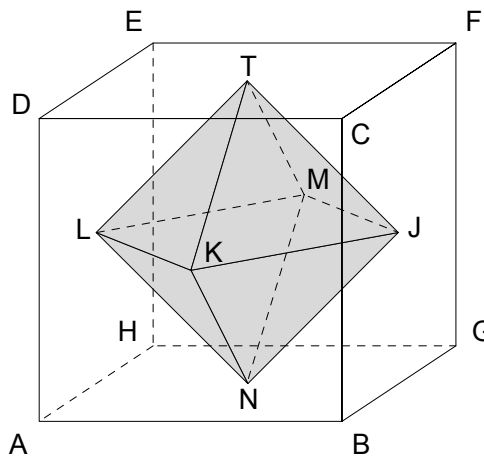


5. Considere o cubo [ABCDEFGH] representado na figura ao lado.

- Mostre que [BDHF] é um tetraedro regular. Como são as suas faces?
- Quantas pirâmides congruentes com [ABHD] se encaixam com o tetraedro [BDHF] perfazendo o cubo?
- Relacionando os volumes do tetraedro e das pirâmides com o volume do cubo, calcule o volume do tetraedro em função da aresta a do cubo. O volume do tetraedro que fração é do volume do cubo?
- Calcule o volume do tetraedro em função de $\overline{BH} = b$.

6. Cortando um tetraedro regular [ABCD] por planos paralelos às faces que passem pelos pontos médios das arestas, obtém-se um octaedro regular (ver figura ao lado).

Compare o volume do octaedro com o do tetraedro original.

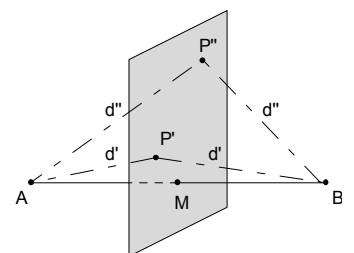


7. Na figura ao lado, considere o cubo [ABCDEFGH]. Sejam T, J, K, M e N os centros das faces do cubo.

- Prove que [TJKLMN] é um octaedro regular.
- Seja $\overline{AB} = a$, calcule \overline{TJ} em função de a .
- Mostre que o quadrilátero [JKLM] é um quadrado e que o plano JKL é o plano mediador de [TN]. Seja O o ponto de intersecção de TN com o plano JKL. Que representa O para o quadrado [JKLM]?

Nota: Chama-se **plano mediador** de um segmento de recta [AB] ao plano perpendicular a [AB] que contém o ponto médio deste segmento. Consequentemente, qualquer ponto P do plano mediador está à mesma distância de A e de B.

- Calcule o volume da pirâmide [TJKLM] em função de a .
- Calcule o volume do octaedro regular e compare-o com o volume do cubo.
- Compare o volume do octaedro com o volume do tetraedro referido no exercício 5.



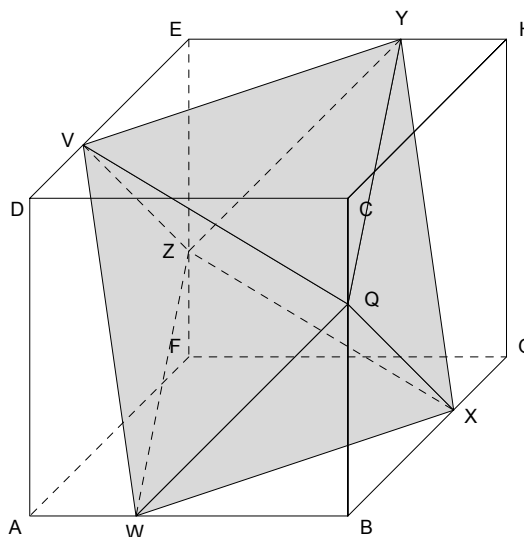
8. Considere o cubo [ABCDEFGH], representado na figura ao lado.

Sendo W, X, Y, V, Q e Z tais que:

$$\overline{AW} = \overline{GX} = \overline{HY} = \overline{DV} = \overline{CQ} = \overline{FZ} = x,$$

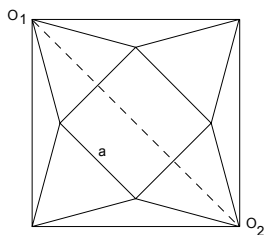
como escolher x para que [WXYVQZ] seja um octaedro regular?

Calcule então a medida da sua aresta \overline{WX} em função da aresta do cubo.



SOLUÇÕES

2.



e)

h) $\frac{V_3}{V_1} = 2\sqrt{2}; \quad V_3 = \frac{72}{5 + 3\sqrt{3}}.$

3.

a) O volume de cada uma das pirâmides é um sexto do volume do cubo.

b) Duplo do volume do cubo.

4. O volume da pirâmide é um terço do volume do cubo.

5.

b) Quatro pirâmides.

c) $V_{\text{cubo}} = V_{\text{tetraedro}} + 4 \times V_{\text{piramide}}; \quad V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3}a^3; \quad V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{3}V_{\text{cubo}}.$

d) $V_{\text{tetraedro}} = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3.$

6. Dado que a medida da aresta [AE] é metade da medida da aresta [AB], o volume do tetraedro [EBF] será $\frac{1}{8}$ do volume do tetraedro [ABCD]. Como há quatro tetraedros congruentes com o tetraedro [EBF], podemos concluir que

$$V_{\text{octaedro}} = \frac{1}{2}V_{\text{tetraedro}}.$$

7.

b) $\overline{TJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$

d) $V_{\text{piramide}} = \frac{1}{12}a^3.$

e) $V_{\text{octaedro}} = 2 \times V_{\text{piramide}} = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{6}V_{\text{cubo}}.$

f) É metade do volume desse tetraedro.

8. $x = \frac{a}{4}; \quad \overline{WX} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a.$