Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2004/05 *Um pouco de história* **10.º Ano**

Nome: ______________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

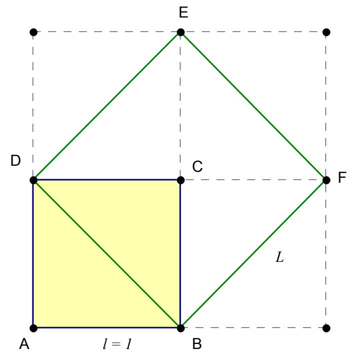
Duplicação do quadrado e a irracionalidade de $\sqrt{2}$

Certamente, depois de teres lido o texto “UM POUCO DE HISTÓRIA”, página 77 do INFINITO 10 A (1.ª Parte), ficaste curioso sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Resolve a ficha de trabalho “Duplicação do quadrado”, em http://www.prof2000.pt/users/amma/af18/t5/FT-1.htm e completa a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$:

D. Vamos agora demonstrar que $\sqrt{2}$ é um *número irracional*, isto é, que não se pode exprimir como o quociente de dois números naturais (portanto, não lhe pode corresponder uma dízima finita ou infinita periódica).

Acompanha e completa a demonstração:



Admitamos que existe um número fraccionário $\frac{m}{n}$ (na forma irredutível), tal que $\sqrt{2} = L = \frac{m}{n}$, isto é, $\overline{BF} = \frac{m}{n} \times \overline{AB}$.

Podemos exprimir as áreas dos quadrados pelas expressões:

- $A_{[ABCD]} = \overline{AB}^2 = 1^2 = 1$
- $A_{[BDEF]} = (\frac{m}{n} \times \overline{AB})^2 = \frac{m^2}{n^2} \times \overline{AB}^2 = \frac{m^2}{n^2} \times 1^2 = \frac{m^2}{n^2}$

Vá sabemos que a área do quadrado [BDEF] é _________ da do quadrado [ABCD], isto é, que $\frac{A_{[BDEF]}}{A_{[ABCD]}} = 2$.

Assim sendo, será também $\frac{m^2}{n^2} = 2$, ou seja, $m^2 = 2n^2$.

Deste modo, m^2 é um número par, pois ____.

E sendo m^2 par, também m será _________, pois quando o quadrado de um número é par, o número é par.

Mas, foi dito acima que número fraccionário $\frac{m}{n}$ está na forma irredutível, logo se *m* é par *n* tem de ser _________.

Por outro lado, se *m* é par existe um número natural *k* tal que $m = 2k$.

Assim, terá de ser $(2k)^2 = 2n^2$, ou seja, $4k^2 = 2n^2$. Logo, ter-se-á $n^2 = 2k^2$.

Deste modo, n^2 é um número par e, consequentemente, *n* é ______________________________.

Ora, mas isto é absurdo, pois *n* não pode ser simultaneamente ________ e _________.

Logo, não pode existir um número racional $\frac{m}{n}$, tal que $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.