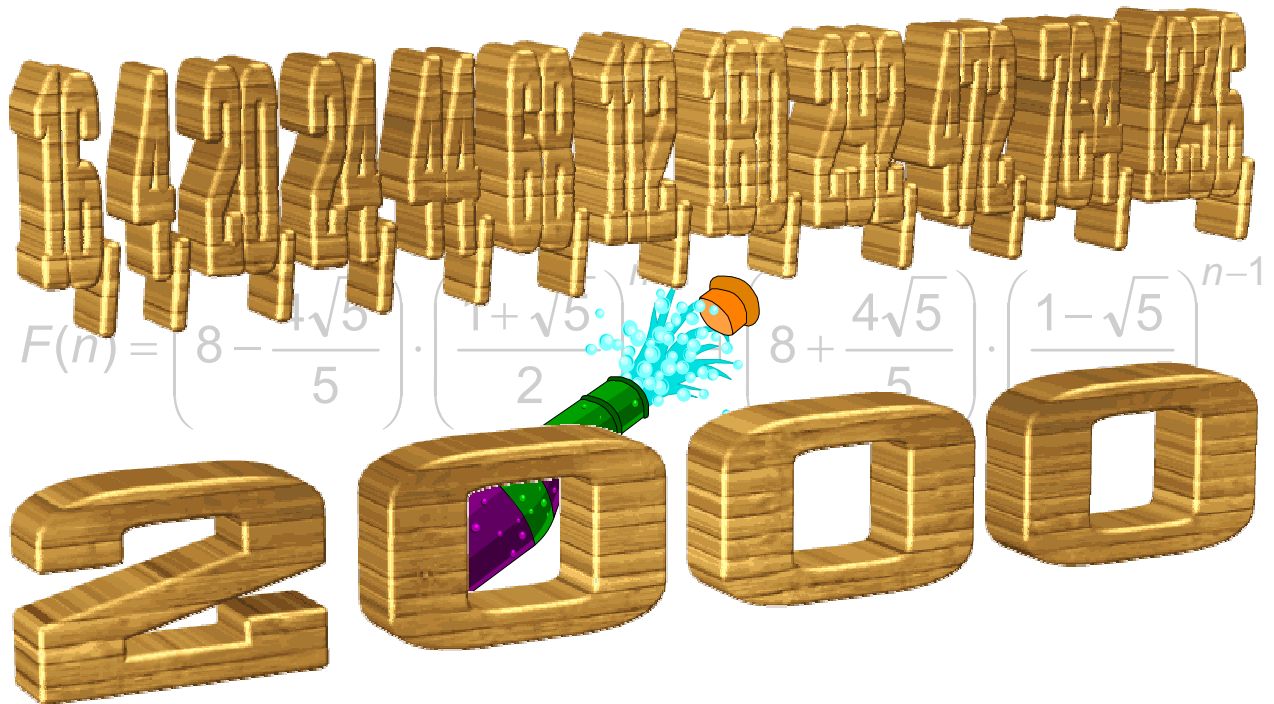




Fibonacci para o ano 2000



António Manuel Marques do Amaral
LAMEGO
1999



António Manuel Marques do Amaral
Urbanização da Ortigosa, Bloco 11 - 2.º Esq.
5100 LAMEGO
e-mail: mop16940@mail.telepac.pt
Sócio da APM n.º 2218

José Paulo Viana,

Junto envio a minha modesta participação no Problema deste Número.

Com os melhores cumprimentos e votos de um BOM 2000,

António Amaral

Conteúdo do ficheiro ZIP

| | |
|----------------|--|
| FIBONACCI .DOC | Ficheiro do Word 97 com o presente documento |
| FIBO1 .BAS | Programa em Qbasic |
| FIBO2 .BAS | Programa em Qbasic |
| FIBO3 .BAS | Programa em Qbasic |
| RESULT1 .TXT | Resultados do programa Fibo1.bas |
| RESULT2 .TXT | Resultados do programa Fibo2.bas |
| RESULT3 .TXT | Resultados do programa Fibo3.bas |
| RESULT1 .XLS | Ficheiro do Excel com os resultados de Fibo1.bas |
| RESULT2 .XLS | Ficheiro do Excel com os resultados de Fibo2.bas |
| FIBO .MTH | Ficheiro do Derive for Windows |
| FIBO1 .XLS | Ficheiro do Excel |
| FIBONACCI .PDF | Este documento em formato do Acrobat Reader |

A prova

Considerando que o número de potenciais seqüências não é muito elevado, optou-se por efectuar uma prova por exaustão recorrendo a um pequeno programa em QBasic e a uma folha de cálculo.

Sem qualquer preocupação de optimização, foi criado um programa (Fibo1.bas) que determinasse os dois primeiros termos de todas as sucessões de Fibonacci que tivessem o termo 2000, com ordem superior ou igual a três.

Foram encontradas 3546 seqüências nessas circunstâncias (Result1.txt):

| Comprimento | N | Termo 1 | Termo 2 |
|-------------|-----------|-----------|----------|
| 5 | 1 | 1 | 666 |
| 3 | 2 | 1 | 1999 |
| 9 | 3 | 2 | 94 |
| | | | |
| 3 | 34 | 15 | 1985 |
| 13 | 35 | 16 | 4 |
| 8 | 36 | 16 | 144 |
| | | | |
| 4 | 3544 | 1998 | 1 |
| 3 | 3545 | 1998 | 2 |
| 3 | 3546 | 1999 | 1 |

Importados esses resultados para uma folha de cálculo, foram gerados mais 11 termos de cada uma dessas sucessões e ordenaram-se os dados por ordem decrescente de comprimento. Apresentam-se de seguida os primeiros dados assim obtidos (Result1.xls):

| Comprimento | N | Termo 1 | Termo 2 | Termo 3 | Termo 4 | Termo 5 | Termo 6 | Termo 7 | Termo 8 | Termo 9 | Termo 10 | Termo 11 | Termo 12 | Termo 13 |
|-------------|-----|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 13 | 35 | 16 | 4 | 20 | 24 | 44 | 68 | 112 | 180 | 292 | 472 | 764 | 1236 | 2000 |
| 12 | 8 | 4 | 20 | 24 | 44 | 68 | 112 | 180 | 292 | 472 | 764 | 1236 | 2000 | 3236 |
| 11 | 46 | 20 | 24 | 44 | 68 | 112 | 180 | 292 | 472 | 764 | 1236 | 2000 | 3236 | 5236 |
| 10 | 56 | 24 | 44 | 68 | 112 | 180 | 292 | 472 | 764 | 1236 | 2000 | 3236 | 5236 | 8472 |
| 10 | 135 | 58 | 23 | 81 | 104 | 185 | 289 | 474 | 763 | 1237 | 2000 | 3237 | 5237 | 8474 |
| 10 | 214 | 92 | 2 | 94 | 96 | 190 | 286 | 476 | 762 | 1238 | 2000 | 3238 | 5238 | 8476 |
| 9 | 3 | 2 | 94 | 96 | 190 | 286 | 476 | 762 | 1238 | 2000 | 3238 | 5238 | 8476 | 13714 |
| 9 | 54 | 23 | 81 | 104 | 185 | 289 | 474 | 763 | 1237 | 2000 | 3237 | 5237 | 8474 | 13711 |
| 9 | 103 | 44 | 68 | 112 | 180 | 292 | 472 | 764 | 1236 | 2000 | 3236 | 5236 | 8472 | 13708 |
| 9 | 152 | 65 | 55 | 120 | 175 | 295 | 470 | 765 | 1235 | 2000 | 3235 | 5235 | 8470 | 13705 |
| 9 | 200 | 86 | 42 | 128 | 170 | 298 | 468 | 766 | 1234 | 2000 | 3234 | 5234 | 8468 | 13702 |
| 9 | 249 | 107 | 29 | 136 | 165 | 301 | 466 | 767 | 1233 | 2000 | 3233 | 5233 | 8466 | 13699 |
| 9 | 296 | 128 | 16 | 144 | 160 | 304 | 464 | 768 | 1232 | 2000 | 3232 | 5232 | 8464 | 13696 |
| 9 | 345 | 149 | 3 | 152 | 155 | 307 | 462 | 769 | 1231 | 2000 | 3231 | 5231 | 8462 | 13693 |
| 8 | 6 | 3 | 152 | 155 | 307 | 462 | 769 | 1231 | 2000 | 3231 | 5231 | 8462 | 13693 | 22155 |
| 8 | 36 | 16 | 144 | 160 | 304 | 464 | 768 | 1232 | 2000 | 3232 | 5232 | 8464 | 13696 | 22160 |
| 8 | 69 | 29 | 136 | 165 | 301 | 466 | 767 | 1233 | 2000 | 3233 | 5233 | 8466 | 13699 | 22165 |

O programa Fibo2.bas permite obter as sucessões com comprimento superior ou igual a 8. As 33 sucessões obtidas encontram-se no ficheiro Result2.txt e estão ordenadas em Result2.xls.

| Comprimento | N | Termo 1 | Termo 2 |
|-------------|----------|-----------|----------|
| 9 | 1 | 2 | 94 |
| 8 | 2 | 3 | 152 |
| 12 | 3 | 4 | 20 |
| 13 | 4 | 16 | 4 |
| 8 | 5 | 16 | 144 |
| 11 | 6 | 20 | 24 |
| | | | |
| 8 | 32 | 224 | 16 |
| 8 | 33 | 237 | 8 |

O programa Fibo3.bas permite obter todos os termos até ao termo 2000 das sucessões com comprimento superior ou igual a 8. As 33 sucessões obtidas encontram-se no ficheiro Result3.txt.

| | | | | | | |
|---------------------------|------------------|-----------------------|----------------------|-------------------|--------------------|----------|
| Comprimento 9 | N 1 | Termo 1 2 | Termo 2 94 | | | |
| u 1 = 2 | u 2 = 94 | u 3 = 96 | u 4 = 190 | u 5 = 286 | u 6 = 476 | u |
| 7 = 762 | u 8 = 1238 | u 9 = 2000 | | | | |
| | | | | | | |
| Comprimento 8 | N 2 | Termo 1 3 | Termo 2 152 | | | |
| u 1 = 3 | u 2 = 152 | u 3 = 155 | u 4 = 307 | u 5 = 462 | u 6 = 769 | u |
| 7 = 1231 | u 8 = 2000 | | | | | |
| | | | | | | |
| Comprimento 12 | N 3 | Termo 1 4 | Termo 2 20 | | | |
| u 1 = 4 | u 2 = 20 | u 3 = 24 | u 4 = 44 | u 5 = 68 | u 6 = 112 | u |
| 7 = 180 | u 8 = 292 | u 9 = 472 | u 10 = 764 | u 11 = 1236 | u 12 = 2000 | |
| | | | | | | |
| Comprimento 13 | N 4 | Termo 1 16 | Termo 2 4 | | | |
| u 1 = 16 | u 2 = 4 | u 3 = 20 | u 4 = 24 | u 5 = 44 | u 6 = 68 | u |
| 7 = 112 | u 8 = 180 | u 9 = 292 | u 10 = 472 | u 11 = 764 | u 12 = 1236 | u |
| 13 = 2000 | | | | | | |
| | | | | | | |
| Comprimento 8 | N 32 | Termo 1 224 | Termo 2 16 | | | |
| u 1 = 224 | u 2 = 16 | u 3 = 240 | u 4 = 256 | u 5 = 496 | u 6 = 752 | u |
| 7 = 1248 | u 8 = 2000 | | | | | |
| | | | | | | |
| Comprimento 8 | N 33 | Termo 1 237 | Termo 2 8 | | | |
| u 1 = 237 | u 2 = 8 | u 3 = 245 | u 4 = 253 | u 5 = 498 | u 6 = 751 | u |
| 7 = 1249 | u 8 = 2000 | | | | | |

A resposta

A mais longa série de Fibonacci que inclui o termo 2000 tem comprimento 13, pode ser definida por

$$F(n) = \left(8 - \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(8 + \frac{4\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

e os seus primeiros 20 termos são:

16, 4, 20, 24, 44, 68, 112, 180, 292, 472, 764, 1236,
2000,
3236, 5236, 8472, 13708, 22180, 35888, 58068...

Um abraço e um Bom 2000!