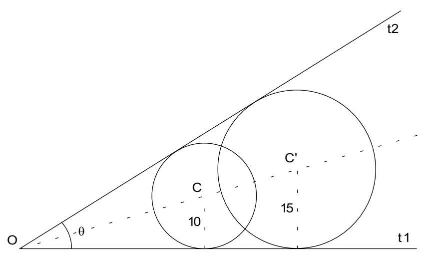
Nome: ____ *N.º:*_____ *Turma:* ___

O problema que se apresenta a seguir é seu conhecido, pois já teve oportunidade de contactar com ele pelo menos duas vezes.
Vamos agora abordar o mesmo problema usando recursos diferentes e resolver umas questões novas sobre o mesmo assunto.



Na figura estão representadas duas circunferências de centros C e C' e raios 10 e 15 centímetros, respectivamente.

As semi-rectas t_1 e t_2 são tangentes às duas circunferências e formam entre elas um ângulo θ tal que $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$.

a) Sendo $\overline{CC'}$ a distância entre os centros das duas circunferências, mostre que, na unidade considerada, $\overline{CC'} = \dfrac{5}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$.

b) Sabe-se que expressão da alínea anterior é válida para toda a posição relativa das circunferências, desde que as semi-rectas t_1 e t_2 lhes sejam tangentes.

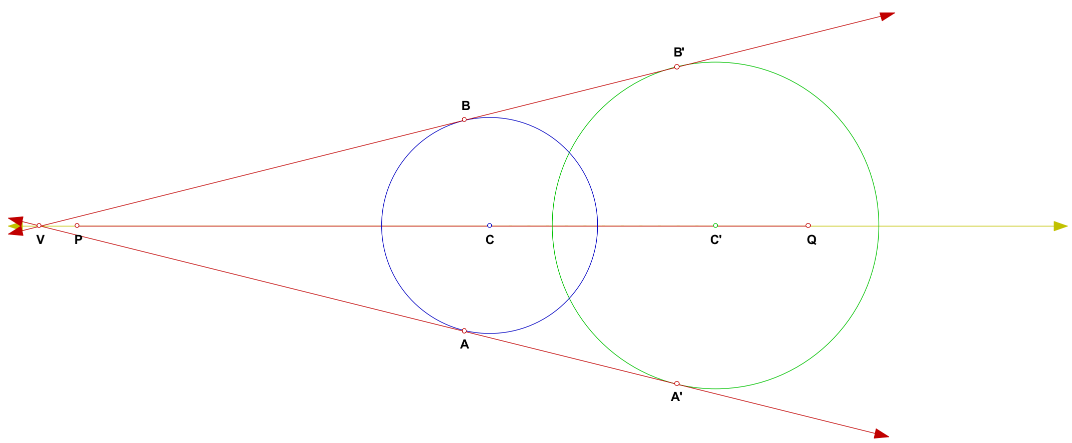
b1) Para que valor do ângulo θ as duas circunferências são tangentes?
(Aproximação a menos de 0,01 rad).

b2) Qual é a menor distância que pode existir entre os centros das duas circunferências?
Justifique o seu raciocínio.

SUGESTÃO: Tenha em consideração a variação da função seno no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1.ª Parte

1. Considere o *sketch* «**Tg-2cir1.gsp**» do *Geometer's Sketchpad*, que simula de fórmula dinâmica a situação acima referida. A imagem seguinte reproduz parte do referido *sketch*.

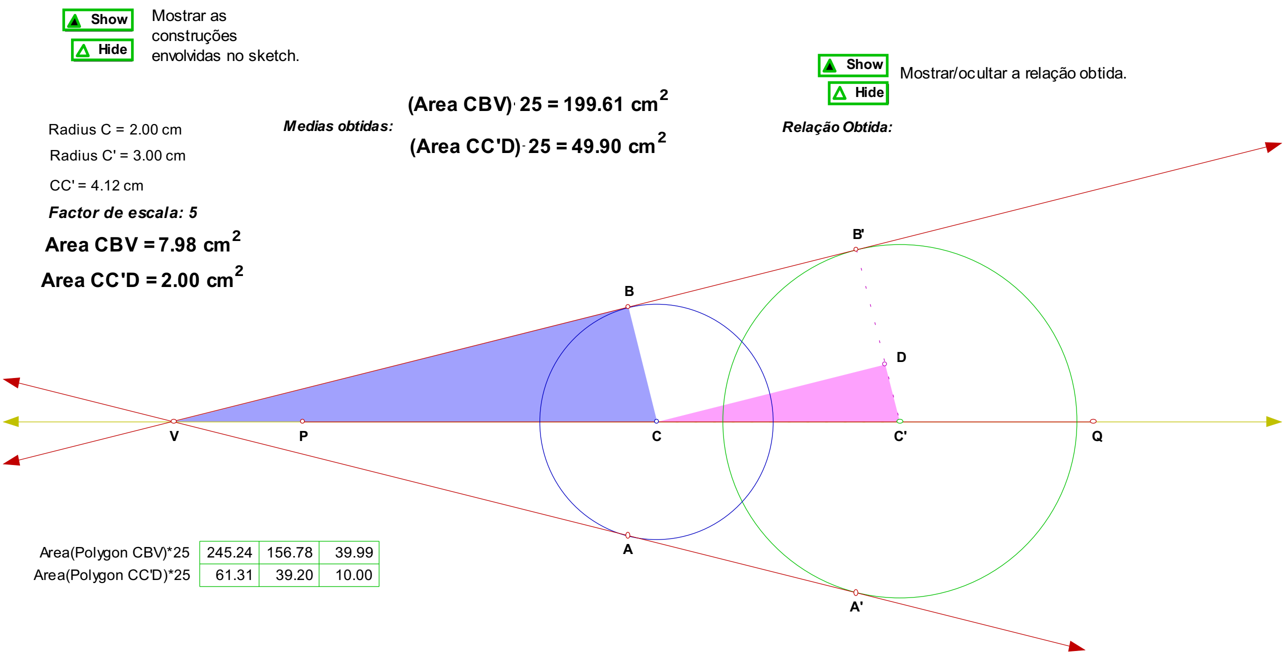


a) Considerando as indicações fornecidas no *sketch*, obtenha diferentes posições relativas para os centros das duas circunferências e verifique a relação indicada na alínea a) do problema proposto.

b) Determine, com a aproximação possível, o valor da amplitude referida na alínea b) do problema.

c) No contexto do problema, investigue, com a aproximação possível, qual a menor distância que pode existir entre os centros das duas circunferências (note que $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$).

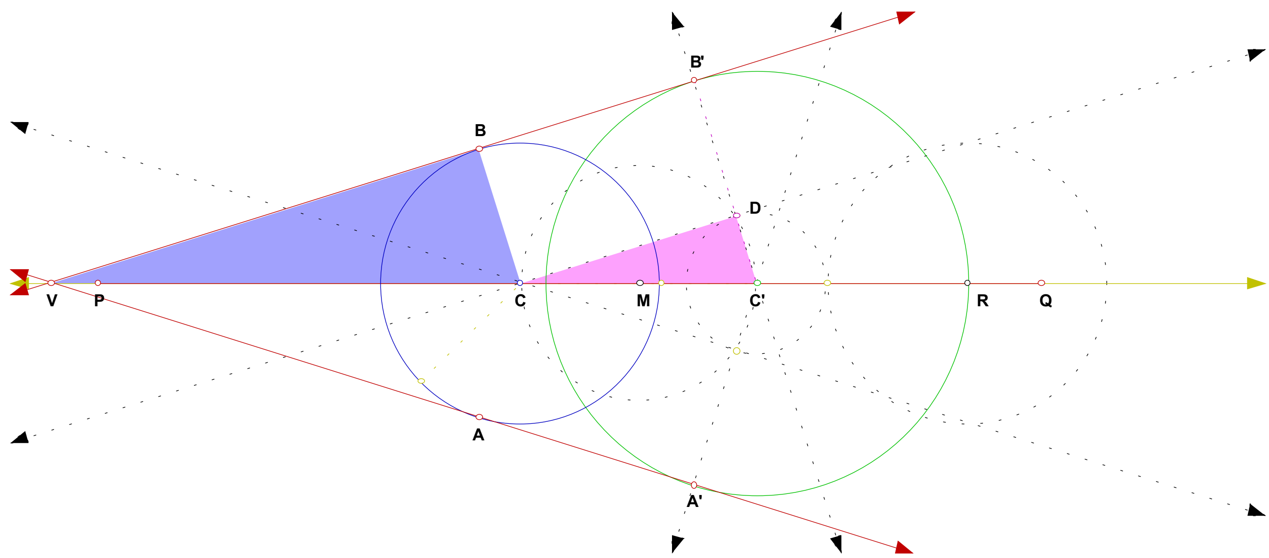
2. Considere agora o *sketch* «**Tg-2cir2.gsp**».
A imagem seguinte reproduz parte do referido *sketch*.



a) Investigue a relação entre as áreas dos dois triângulos considerados.

b) Designado por *r* e *R*, respectivamente, os raios das circunferências menor e maior, mostre, justificando, que a relação entre as áreas desses triângulos é $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r}{R-r}\right)^2$.
Comprove que o valor encontrado na alínea anterior satisfaz esta relação.

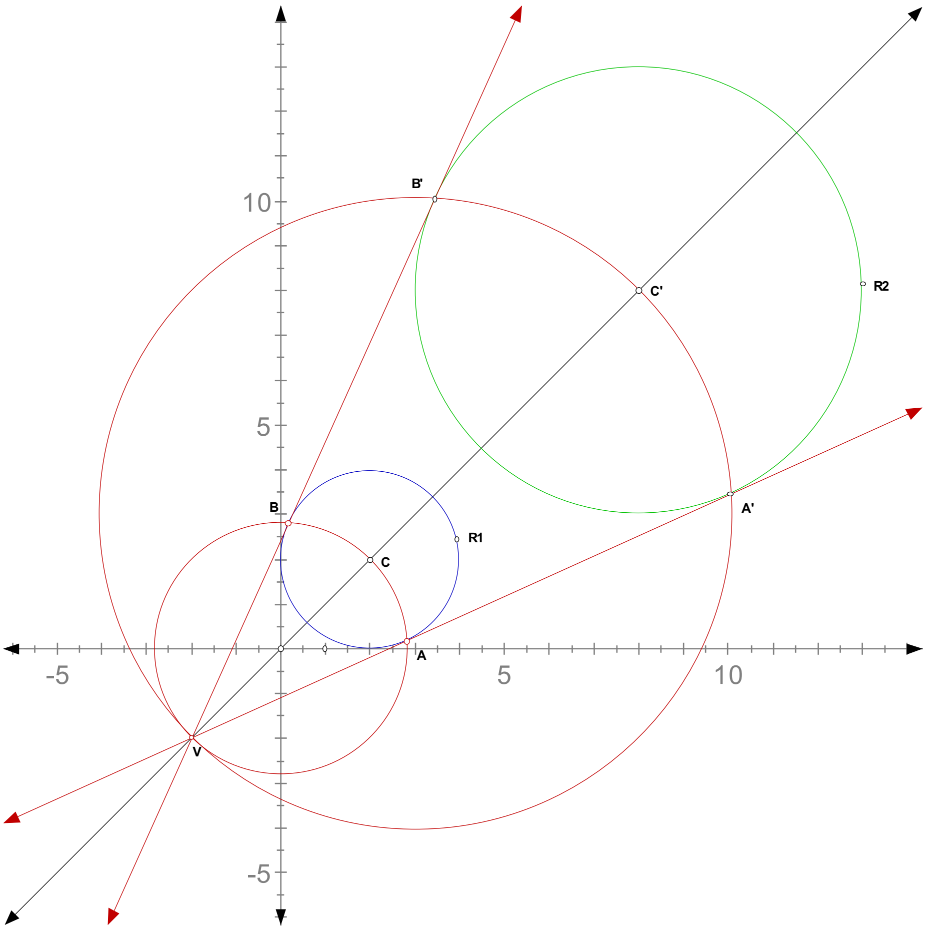
c) A imagem seguinte apresenta as construções escondidas no *sketch*.
Analise essas construções.



3. Num referencial ortonormado, considere duas circunferências de centros C (2, 2) e C' (8, 8) e raios, respectivamente, 2 unidades e 5 unidades, representadas na figura ao lado, assim como as tangentes a essas circunferências.

Usando <u>cálculo vectorial e trigonometria</u>, pretende-se determinar as coordenadas dos pontos A, B, A' e B', pontos de intersecção das tangentes com as duas circunferências dadas, assim como as equações dessas circunferências.

SUGESTÃO: Tenha em consideração relações já obtidas nas actividades anteriores.



a) Explore o sketch «**Tg-2cir3.gsp**».

b) Justifique a existência de duas circunferências tangentes interiores que passam, respectivamente, pelos pontos V, B e C, e pelos pontos V, B' e C'.

c) Determine as equações das duas circunferências referidas na alínea anterior.

d) Descreva um processo que permita determinar as coordenadas dos pontos A, B, A' e B'.

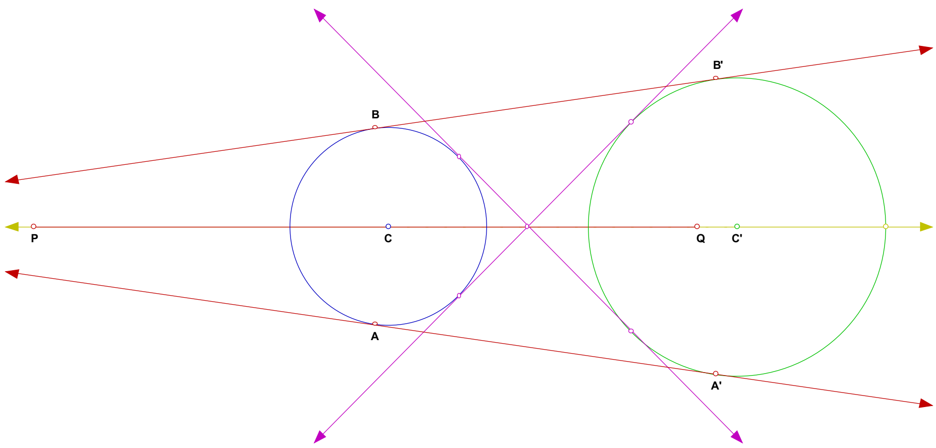
e) É possível mostrar que as coordenadas dos pontos A e B são:

$$A\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}\right) \quad \text{e} \quad B\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right).$$

Explore de novo o sketch «**Tg-2cir3.gsp**» e verifique estas coordenadas assim como as equações que obteve na alínea c).

4. **UM DESAFIO** para as Férias da Páscoa **...**

Já comentou, com toda a certeza, que além destas duas tangentes existem outras duas, como poderá confirmar no *sketch* «**Tg-2cir4.gsp**». Como determinar estas últimas duas tangentes?



2.ª Parte

Para cada uma das questões seguintes, escreva um texto coerente sobre a sua resolução, de um modo que seja compreensível para um leitor (o professor, os colegas ou mesmo outras pessoas). Para isso, reflicta globalmente sobre o problema, as razões por que o abordou de uma certa maneira e as relações entre as principais ideias matemáticas envolvidas. Não se esqueça de explicitar os procedimentos que usou e explique as suas afirmações. Inclua ainda os desenhos ou esquemas que usou.

Aquele que não é capaz de comunicar aquilo que fez com um problema não o resolveu verdadeiramente.

1. Relativamente à alínea e) da questão 3 da 1.ª Parte, complete de forma clara e coerente uma exposição que permite determinar as coordenadas dos pontos A e B:

" Sendo B (x, y) e considerando alguns dos resultados e relações obtidas anteriormente, nomeadamente, ...

comecemos por calcular, usando a definição, o produto escalar dos vectores $\vec{CV}$ e $\vec{CB}$:

$\vec{CV}.\vec{CB} = ...$ $= 4$.

Por outro lado, o mesmo produto escalar, agora expresso em termos das coordenadas dos dois vectores, é:

$\vec{CV}.\vec{CB} = ...$

Assim, ... obtemos a equação $y = -x + 3$, que não é mais do que a equação reduzida da recta ...., pois contém o ponto ..... e é ...., visto o declive desta última ser .... e .... do da primeira.

Considerando agora a intersecção desta recta com a circunferência tangente interior de menor raio, temos:

$x^2 + (-x+3)^2 = 8 \Leftrightarrow ...$

Assim, as coordenadas dos pontos A e B são A $\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)$ e B $\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$.

Esta relação entre as coordenadas não é de estranhar, pois sendo estes pontos .... em relação à recta de equação $y = x$, bastará .... para obter as coordenadas do outro."

2. Relativamente à alínea c) da questão 1 da 1.ª Parte, mostre que o valor exacto dessa distância é $5\sqrt{2}$ cm.

3. Considere a alínea c) da questão 2 da 1.ª Parte.
Descreva a sequência correcta das construções e justifique o processo usado para traçar as tangentes, usando apenas régua não graduada e compasso.
Reproduza essas construções usando material de desenho.

Auto-Avaliação

Nível de qualidade / Parâmetros	A	B1	B2	B3	B4	B5
Avaliação (1, 2, 3, 4 ou 5)						

Apreciação Global