
Departamento do Ensino Secundário

Matemática B

Cursos Tecnológicos de:

Construção Civil, Electrotecnicia/Electrónica, Informática, Mecânica, Química e Controlo Ambiental, Ambiente e Conservação da Natureza, Desporto, Administração, Técnicas Comerciais e Serviços Jurídicos.

1 Introdução

Para os cursos de Construção Civil, Electrotecnicia/Electrónica, Informática, Mecânica, Química e Controlo Ambiental, Ambiente e Conservação da Natureza, Desporto, Administração, Técnicas Comerciais e Serviços Jurídicos, a Matemática aparece como uma disciplina trienal da componente de Formação Científico-Tecnológica a que é atribuída uma carga horária semanal de 3h dividida em duas aulas de 90 minutos ao longo de 33 semanas de efectiva leccionação.

A Formação Científico-Tecnológica é constituída, em cada curso, por um núcleo comum de disciplinas de natureza científica, técnica e tecnológica que, numa primeira fase, ao longo dos 10^o e 11^o anos de escolaridade, proporcionam uma formação de banda larga. Nesta fase, os estudantes desenvolvem conhecimentos, capacidades e atitudes que lhes permitem a aprendizagem de um conjunto de competências - base do respectivo curso. Numa segunda fase, correspondendo ao 12^o ano de escolaridade, através de disciplinas de especificação curricular, a formação científico-tecnológica permite o aprofundamento e o desenvolvimento das competências-base tendo em vista a preparação e orientação para um dado sector de actividade, para uma profissão ou para uma família de profissões.

O programa de Matemática dos Cursos Tecnológicos tem de ser tal que esclareça a sua contribuição para a aprendizagem de competências fundamentais para o exercício de actividades profissionais, ao mesmo tempo que tem de acompanhar o programa dos Cursos Gerais de forma a permitir a todos os estudantes alterar os seus percursos educativos e formativos, sem qualquer prejuízo no que se refere ao tempo normal previsto para a conclusão do curso.

Para os estudantes dos Cursos Tecnológicos, em particular nos dois primeiros anos do ensino secundário, não é fundamental o desenvolvimento de competências ao nível do domínio das regras lógicas e dos símbolos. Se é legítimo ensinar a manejar as ferramentas de cálculo, o essencial da aprendizagem da Matemática deve ser procurado ao nível das ideias para a resolução de problemas, para as aplicações da Matemática. O uso das ferramentas deve ser ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes, enfim em situações que exijam o seu manejo e em que seja vantajoso

o seu conhecimento, privilegiando mesmo características típicas do ensino experimental. A Matemática, nas suas conexões com todos os ramos de saber, é uma contribuição decisiva para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas e tecnológicas.

Ao longo dos três anos do ensino secundário, os estudantes abordarão os seguintes temas: números e geometria, incluindo trigonometria; funções reais e análise infinitesimal; estatística e probabilidades; matemática discreta.

A abordagem da Geometria inclui assuntos de geometria sintética e métrica, geometria analítica e trigonometria, com as competências de cálculo numérico a elas associadas.

A abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista - gráfico, numérico e algébrico - sobre tipos simples de funções, desde as algébricas inteiras (que são as tratadas, limitadamente embora, no 10º ano), passando pelas fraccionárias e acabando nas transcendentais - exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas. Neste grande tema, será realizada uma abordagem ao cálculo de variações e de limites, bem como ao estudo da continuidade, sem recurso às definições simbólicas rigorosas e às regras de cálculo.

A abordagem da Estatística e das Probabilidades elementares completará as aprendizagens básicas, com algumas noções novas e ferramentas que não podem ser compreendidas no ensino básico.

O ensino de todos estes temas tem de ser suportado em actividades propostas a cada estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas adequadas a cada curso sobre as quais se coloquem questões significativas, resolução de problemas não rotineiros e conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais.

As questões de lógica, teoria de conjuntos e de formas de raciocínio propriamente ditas não aparecem no corpo do programa. Não quer isto dizer que estas questões possam ficar ausentes do ensino da Matemática, mas não podem aparecer como conteúdos em si mesmos. Como temas transversais consideram-se as formas de organizar as actividades de resolução de problemas, as aplicações e a modelação matemática, aspectos da história da matemática, a utilização da tecnologia e a comunicação matemática. Estas são transversais e não podem nem devem ser localizadas temporalmente na leccionação e muito menos num determinado ano de escolaridade, antes devem ser abordados à medida que forem sendo necessários e à medida que for aumentando a compreensão sobre os assuntos em si, considerando sempre sentido de oportunidade, vantagens e limitações.

Em muitos aspectos, o desenvolvimento do programa integra informações sobre a oportunidade de abordar questões de experimentação no ensino da Matemática além da tecnologia e da história da matemática, assim como informações sobre novos tipos de instrumentos de avaliação. Por isso, as indicações sobre avaliação só poderão ser entendidas completamente em ligação com a natureza das actividades propostas ou sugeridas no corpo do programa.

Os inevitáveis problemas de todas as transições de ciclos tornaram necessário conceber o 10º ano de uma nova forma, particularmente nas primeiras semanas de aulas, em que estratégias de recuperação e de acompanhamento dos jovens devem ter uma grande

relevância. Nesse sentido, considera-se um módulo inicial no qual se incluem conceitos prévios considerados verdadeiramente essenciais e estruturantes a serem especialmente trabalhados nas primeiras duas ou três semanas de aulas do 10^o ano e sempre que se venha a revelar necessário. O programa de Matemática contempla este módulo inicial (alargando-o para 4 semanas e meia). Pretende-se que os estudantes sejam colocados perante a resolução de problemas escolhidos que permitirão despistar dificuldades e deficiências na formação básica e acertar estratégias de remediação. A estratégia assente na resolução de problemas evita ainda que os estudantes sem dificuldades sejam desgastados em revisitações expositivas de assuntos que já dominam.

Sempre que o professor detectar nos alunos lacunas inultrapassáveis em temas de ciclos anteriores, deve desencadear mecanismos de remediação. Os apoios integrados nestes mecanismos devem ser organizados de forma diversificada, não se limitando a meras aulas de repetição. As escolas devem estudar os melhores meios de pôr em prática um sistema de apoio e remediação, introduzindo mecanismos de avaliação e regulação da sua actividade e dos seus resultados, nomeadamente criando condições institucionais - tempo, horários compatíveis, designação dos professores - e organizativas - tempo, constituição de grupos de alunos/turmas a propor para apoio.

2 Apresentação do Programa

2.1 Finalidades

São finalidades da disciplina no ensino secundário:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
- Desenvolver a capacidade de seleccionar a Matemática relevante para cada problema da realidade.
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade.
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa.
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência.
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade.

- Criar capacidades de intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade actual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa.

2.2 Objectivos e competências gerais

Valores/Atitudes	Capacidades/Aptidões	Conhecimentos
<p>Desenvolver a confiança em si próprio:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ exprimir e fundamentar as suas opiniões; ■ revelar espírito crítico, de rigor e confiança nos seus raciocínios; ■ abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade; ■ procurar a informação de que necessita; ■ interessar-se por notícias e publicações relativas à matemática e a descobertas científicas e tecnológicas; ■ apreciar o contributo da Matemática para a resolução de problemas do Homem através dos tempos. <hr/> <p>Desenvolver interesses culturais:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa; ■ interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas; ■ apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo. <hr/> <p>Desenvolver hábitos de trabalho e persistência:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada; ■ manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova. 	<p>Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ analisar situações da vida real, identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução; ■ seleccionar estratégias de resolução de problemas; ■ formular hipóteses e prever resultados; ■ interpretar e criticar resultados no contexto do problema; ■ resolver problemas nos domínios da Matemática, da Física, da Economia e das Ciências Humanas, ... <hr/> <p>Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ descobrir relações entre conceitos de Matemática; ■ formular generalizações a partir de experiências; ■ validar conjecturas; ■ fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados; ■ compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade. 	<p><i>(parte significativa depende da discussão pública)</i></p> <p>Desenvolver o cálculo (operações em \mathbb{R}, e com expressões em contexto de problemas reais)</p> <p>Desenvolver o conceito de função, no contexto da modelação matemática de situações realistas (polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas)</p> <p>Ampliar conceitos de Estatística e estudar modelos de Probabilidade</p> <hr/> <p>Ampliar o estudo da Geometria</p> <p>Resolver problemas de extremação (de vários tipos: usando taxa de variação, programação linear, ...)</p>

continua

Valores/Atitudes	Capacidades/Aptidões	Conhecimentos
<p>Desenvolver o sentido da responsabilidade:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas; ■ avaliar situações e tomar decisões. <hr/> <p>Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades; ■ respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças; ■ intervir na dinamização de actividades e na resolução de problemas da comunidade em que se insere. 	<p>Desenvolver a capacidade de comunicar:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico; ■ interpretar textos de Matemática; ■ exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens; ■ usar correctamente o vocabulário específico da Matemática; ■ usar a simbologia da Matemática; ■ apresentar os textos de forma clara e organizada. 	

2.2.1 Sobre as competências a desenvolver

1.

No 10º ano, os estudantes dos Cursos Tecnológicos recuperam e aprofundam, para um nível secundário, algumas apropriações matemáticas realizadas no ensino básico, enquanto que são instruídos no sentido das novas exigências e das formas de trabalho da disciplina de Matemática. Ao mesmo tempo que desenvolvem competências genéricas, apropriam de algum modo competências ao nível da construção das representações adequadas a situações simples usando geometria e álgebra, mas também ao manejo de técnicas de recolha e registo de dados e sua descrição; também são apresentados às noções relativas a funções e à dinâmica das suas propriedades com o estudo das famílias e o que isso representa ao nível das transformações associadas às alterações de parâmetros.

2.

Nos 11º e 12º anos, pretende-se que:

- todo o ensino parta de propostas de trabalho relevantes e com significado para os estudantes dos diversos cursos, esperando-se que o professor acompanhe activamente os trabalhos, disponibilizando as ferramentas matemáticas necessárias e participando na organização das ideias;
- a aprendizagem seja baseada no trabalho autónomo sobre as situações apresentadas (que podem proporcionar vários níveis de resolução) e em actividades que aprofundem os conceitos introduzidos no decurso dos trabalhos;
- se desenvolvam competências gerais de autonomia e, especialmente, que se faça participar a matemática no desenvolvimento das competências profissionais.

Espera-se que os estudantes apropriem conceitos e técnicas matemáticas enquanto enfrentam situações, de tal modo que, face a problemas realistas, possam mobilizar os conhecimentos científicos adequados para dar respostas próprias; pretende-se que o estudante seja capaz de formar uma opinião própria participando nas decisões ou que consiga ele próprio tomá-las.

Entende-se aqui que cada competência implica um corpo coerente de conhecimentos, atitudes ou capacidades (e habilidades na escolha e depois no manejo das ferramentas, quaisquer que elas sejam), que só os resultados operados na acção autónoma dos estudantes pode permitir esperar que tenham sido desenvolvidas para serem úteis na vida.

3.

As aplicações e os problemas extraídos do mundo real estão no centro deste programa. As aplicações integradas num contexto significativo para os estudantes, são usadas como ponto de partida para cada novo assunto, sendo parte do processo de construção de conceitos matemáticos dos estudantes e usadas como fontes de exercícios. Assim, sendo as actividades de modelação e resolução de problemas partes cruciais deste novo currículo, os professores devem cumprir os seguintes critérios:

- a teoria e as aplicações têm de estar interligadas;
- os problemas apresentados têm de estimular os processos de pensamento em vez da aplicação de algoritmos;
- os contextos das situações problemáticas apresentadas devem integrar diferentes ideias matemáticas;
- alguns dos problemas a seleccionar devem ser abertos obrigando os estudantes a escolher as ferramentas matemáticas mais adequadas.

A escolha de situações ricas e variadas é essencial para o cumprimento destes critérios; recomenda-se a colaboração activa dos professores de Matemática em cada escola e de escolas vizinhas.

Os estudantes (individualmente ou em grupo) devem ter a possibilidade de escolher as suas próprias estratégias de resolução de problemas; o facto de se poder confrontar diferentes processos de resolução de problemas (usados pelos colegas ou mesmo pelo professor) permite fomentar a aprendizagem de uma forma crítica, valorizando o trabalho efectuado (seu e/ou do seu grupo e o dos outros).

Assim, para todos os assuntos, sem esquecer a necessidade de contacto com as ideias e os métodos fundamentais da Matemática, a um certo nível, o ensino da Matemática é organizado de forma potente em volta das aplicações viradas para o desenvolvimento de competências necessárias para o exercício de actividades profissionais qualificadas. Nestas actividades de aplicação, o uso de tecnologias de cálculo, com capacidades gráficas e de comunicação, é fundamental para a criação e o desenvolvimento de competências úteis a todos os desempenhos profissionais. Pelas suas especificidades, a calculadora gráfica e o computador completarão os meios à disposição dos professores e estudantes para executar os diferentes aspectos de uma verdadeira actividade matemática. Com efeito permitem:

- obter rapidamente uma representação do problema, de um conceito, a fim de lhe dar sentido e favorecer a sua apropriação pelo estudante;

- ligar aspectos diferentes (gráfico, numérico e algébrico) de um mesmo conceito ou de uma mesma situação;
- explorar situações fazendo aparecer de forma dinâmica diferentes configurações;
- proceder de forma rápida à verificação de certos resultados.

4.

A competência matemática a desenvolver no domínio dos diferentes temas inclui as seguintes vertentes:

- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis, a computadores e a calculadoras gráficas;
- a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio (espacial ou outro) na análise e tratamento de situações problemáticas e na resolução de problemas;
- o gosto por experimentar, fazer e investigar matemática nas simulações ou situações simuladas, recorrendo à modelação com uso da calculadora, de sensores, de *software* adequado aos computadores e de modelos matemáticos;
- a confiança pessoal por desenvolver actividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica usada;
- a predisposição, abertura e aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas, através do uso de uma linguagem escrita e oral, não ambígua e adequada às situações trabalhadas;
- a compreensão e ampliação de conceitos matemáticos.

2.3 Visão Geral dos Temas e Conteúdos

É indispensável que o professor, além de conhecer bem o programa de cada ano que vai leccionar, tenha um conhecimento global do programa do ensino secundário (para ter conhecimento das conexões estabelecidas entre os diversos temas), bem como uma perspectiva integradora dos programas dos ciclos do ensino básico. O programa de cada ano desenvolve-se por grandes temas, a tratar pela ordem indicada no programa. Deve ser feita uma planificação adequada de modo que não seja prejudicado o tratamento de nenhum dos temas e sejam integrados os conteúdos do tema transversal que vierem a propósito. Se o Projecto Educativo ou o Plano de Actividades da Escola o aconselhar os professores poderão fazer planificações diversas da indicada, desde que seja elaborado um projecto específico justificativo e que essa alteração fique devidamente registada em acta. A escolha dos temas foi feita com uma preocupação de equilíbrio entre as principais áreas da Matemática:

- Funções e Cálculo Diferencial
- Geometria (no plano e no espaço)
- Probabilidades, Estatística e Matemática Discreta.

Todos os temas têm como preocupação central o trabalho com problemas reais e com modelos concretos. Os temas clássicos de Análise, Álgebra e Geometria estão presentes nestes conteúdos, embora o segundo se encontre distribuído pelos outros temas. Esta classificação deve ser considerada de forma muito relativa, tendo-se sempre em atenção que, no corpo do programa, assumem importância significativa tanto técnicas específicas como estratégias que, constituindo uma base de apoio que os estudantes utilizam na sua actividade matemática independentemente do tema, atravessam o programa de forma transversal. Referimo-nos aos temas transversais

- Resolução de Problemas e Actividades Investigativas
- História da Matemática
- Comunicação Matemática
- Aplicações e Modelação Matemática
- Tecnologia e Matemática

que, sendo de difícil quantificação, não são por isso menos importantes que os temas antes referidos.

Tudo o que os temas transversais propõem deve ser abordado sistematicamente ao longo do ciclo. Não existem indicações taxativas sobre a sua distribuição ao longo dos anos, mas o desenvolvimento dos temas e as indicações metodológicas vão sugerindo alguns momentos onde os diversos temas transversais podem ser explorados. A criação de um ambiente propício à resolução de problemas deve constituir um objectivo central nas práticas dos professores já que a resolução de problemas é um método fundamental e é considerada no programa não só como indicação metodológica mas também como tema. A resolução de problemas está considerada no programa como motivação, como sistema de recuperação e como forma privilegiada para suscitar a comunicação oral e escrita.

Neste programa é dada uma ênfase especial ao trabalho das Aplicações e Modelação Matemática, e o recurso à Tecnologia desempenha um papel fundamental. Além do mais as Conexões entre os diversos temas são consideradas fundamentais neste programa, para que os estudantes possam ver que os temas são aspectos complementares de uma mesma realidade. Assim, o professor deve aproveitar todas as ligações entre os temas em cada ano e de cada ano com os anos anteriores, possibilitando também a ampliação e consolidação de cada conceito, sempre que ele é retomado. Em particular o professor deve estabelecer conexões entre os temas de cada ano e não deixar que qualquer tema seja abandonado após o fundamental da sua leccionação.

No tema de Geometria insiste-se no trabalho por via intuitiva com uma grande ênfase no desenvolvimento de capacidades de visualização geométrica.

Inicia-se o 10^o ano com o estudo da Geometria no Plano e no Espaço, porque a Geometria é, por excelência, um tema formativo no sentido mais amplo do termo que, pela

resolução de problemas apropriados, desenvolve variadas capacidades, desde a observação ao raciocínio dedutivo, ao mesmo tempo que deixa perceber verdadeiras conexões entre os vários temas da Matemática, da lgebra à Análise e à Estatística. É por isso que é tão importante, desde o início, trabalhar com a Geometria, tentando superar algumas (não todas necessariamente) eventuais dificuldades ou lacunas que os estudantes tragam dos ciclos anteriores. Começar por este tema permite o desenvolvimento de capacidades de visualização e representação através de figuras que tão necessárias são para o estudo de todos os outros temas.

Em cada tema é importante encontrar-se um equilíbrio entre o desenvolvimento significativo dos conceitos, capacidades e aptidões e o domínio do cálculo. Neste programa está excluída a introdução de qualquer formalismo, a não ser que uma determinada notação se revele vantajosa para a comunicação de uma ideia matemática.

Para cada tema indica-se uma previsão do número de aulas necessárias à sua abordagem na leccionação. Não sendo mais do que uma previsão, essa indicação deve ser encarada com flexibilidade, sem prejuízo do peso relativo e da profundidade do tratamento desejado que o número de aulas previsto indicia. O professor deve ter como preocupação fundamental abordar e desenvolver, em cada ano, os variados tópicos do programa, pois eles fornecem métodos matemáticos diversificados e desempenham funções diferentes todas imprescindíveis para, em conjunto, contribuírem para a formação integral do cidadão autónomo e livre. Nunca se deve valorizar um conteúdo de tal forma que se possa prejudicar irremediavelmente a formação em algum dos grandes temas ou no desenvolvimento de alguma das capacidades/aptidões ou competências reportadas na redacção das finalidades e dos objectivos gerais deste programa de ensino.

Este programa é construído tendo por base 33 semanas lectivas de que se contam um mínimo de 30 semanas efectivas de aulas (incluindo avaliação); tendo em mente que a avaliação não se deve circunscrever a aulas especificamente reservadas a tal nem se deve limitar a testes escritos (isto é, que o professor deverá recorrer a instrumentos diversificados de avaliação ao longo do ano lectivo integrando-os na aprendizagem matemática dos estudantes), as aulas reservadas exclusivamente para testes escritos não devem ultrapassar cerca de 5% das aulas; temos assim um mínimo de 28 semanas de leccionação, ou seja, um mínimo de 57 aulas de 90 minutos cada (correspondentes a 85,5 horas).

Quadro Resumo Distribuição dos temas em cada ano

10º Ano	11º Ano	12º Ano
<p>Tema I Geometria no Plano e no Espaço</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço. ■ O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço. 	<p><i>(Em discussão)</i></p> <p>Tema I Movimentos periódicos. Trigonometria. Funções trigonométricas.</p>	<p><i>(Em discussão)</i></p> <p>Tema I Probabilidades e Combinatória.</p>
<p>Tema II Funções e Gráficos. Generalidades. Funções polinomiais.</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Função, gráfico e representação gráfica. ■ Estudo intuitivo de propriedades das funções quadráticas e cúbicas e dos seus gráficos 	<p>Tema II Movimentos não lineares. Taxa de variação. Funções racionais.</p>	<p>Tema II Modelação: Exponenciais; Logaritmos Sucessões</p> <p>Problemas de extremos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ aplicações da taxa de variação ■ programação linear
<p>Tema III Estatística</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Estatística - Generalidades ■ Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). ■ Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva). 		
<p>T e m a s T r a n s v e r s a i s</p>		
<ul style="list-style-type: none"> <li style="width: 33%;">■ Resolução de Problemas e Actividades Investigativas <li style="width: 33%;">■ História da Matemática <li style="width: 33%;">■ Comunicação Matemática <li style="width: 33%;">■ Aplicações e Modelação Matemática <li style="width: 33%;">■ Tecnologia e Matemática 		

2.4 Sugestões metodológicas gerais

As finalidades e objectivos enunciados determinam que o professor, ao aplicar este programa, contemple equilibradamente:

- o desenvolvimento de atitudes;
- o desenvolvimento de capacidades;
- a aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização.

Na concretização da metodologia proposta cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adoptando uma estratégia que implique o estudante na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa. Em particular deve ser fomentado o trabalho de grupo e o trabalho de pares de estudantes. Nesse sentido é importante a utilização de aulas desdobradas (quando o número de alunos o justificar).

2.4.1 Avaliação

Avaliar os conhecimentos matemáticos dos estudantes significa reunir e analisar dados sobre o que estes sabem a respeito de conceitos e métodos matemáticos. Estes dados devem ser utilizados tanto pelos professores como pelos estudantes; os professores deverão utilizá-los para ajudar os estudantes a adquirir conhecimentos profundos e ideias claras sobre os conteúdos matemáticos. Pretende-se que a avaliação em Matemática não se restrinja a avaliar o produto final mas também o processo de aprendizagem e permita que o estudante seja um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem.

O professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificá-las. Deve propor ao estudante um conjunto de tarefas de extensão e estilo variáveis, algumas delas individuais e outras realizadas em grupo, de modo que, no conjunto, reflectam equilibradamente as finalidades do currículo. Só assim se contribuirá para promover outras competências e capacidades que se pretendem desenvolver no ensino secundário. Em particular recomenda-se fortemente que, em cada semestre, a avaliação contemple obrigatoriamente redacções matemáticas de modo a reforçar a importante componente da comunicação matemática (o trabalho pode ser proveniente de um trabalho individual, de grupo, de um trabalho de projecto ou outro julgado adequado). No corpo do programa aparecem muitas referências que poderão propiciar a utilização de novos instrumentos de avaliação.

As actividades de aprendizagem deverão ser encaradas como tarefas de avaliação representando, neste caso, o tempo empregue na sua execução um claro benefício para a aprendizagem dos estudantes. O professor pode ficar a conhecer o que os estudantes são capazes de fazer perante um problema concreto ou mediante uma proposta de investigação. Esses dados podem ser utilizados para orientar aprendizagens posteriores que ofereçam, aos estudantes, oportunidade de ir integrando as novas aprendizagens de forma positiva e consciente. A realização dessas actividades em trabalho de grupo permite aos estudantes adquirir uma certa prática para enfrentar novos problemas ou ideias matemáticas escrevendo e explicando claramente os seus resultados e comunicando as suas observações e soluções de forma clara, primeiro aos colegas em pequeno grupo, depois à turma e ao

professor. A interacção com outros estimula a aparição de novos problemas, de novas ideias e de descobertas adicionais. Os estudantes deparam-se com formas diferentes da sua de resolver problemas e a compreensão conceptual é mais profunda e duradoura. O professor, observando, interpelando os grupos, discutindo com os estudantes, receberá de imediato grande quantidade de informação que se deseja possa ser complementada, sempre que possível, com a avaliação posterior de relatórios.

Mas, é claro, os testes escritos, em si mesmos, têm aspectos muito positivos e são muito importantes. Eles deverão aparecer em momentos de síntese e cumprir uma função diferenciada da dos outros instrumentos. A nível do Ensino Secundário existirá sempre um certo número de provas de âmbito nacional ou regional. Por um lado, o professor deve ter em conta na sua avaliação a existência destas provas (realizando provas de estilos diversificados, incluindo por exemplo algumas questões de escolha múltipla, que preparem os estudantes para enfrentar os momentos de avaliação global), mas, por outro lado, deve dessacralizá-las pois a verdadeira preparação para essas provas é feita trabalhando com regularidade e afincado ao longo do ano.

Para garantir um equilíbrio entre as diversas formas de avaliação recomenda-se fortemente que, na classificação final de um período, o peso dos testes escritos não ultrapasse, em regra, metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

Recomenda-se também a utilização de testes em duas fases que permitem o desenvolvimento da persistência na procura de soluções para situações novas, para além de contribuírem para uma atitude de reflexão sobre a aprendizagem.

Finalmente recomenda-se a utilização das brochuras de apoio aos programas; exemplos e reflexões que nelas constam ajudam à diversificação dos instrumentos de avaliação que este programa preconiza.

2.5 Recursos

Todas as Escolas Secundárias devem dotar-se quanto antes de **Laboratórios de Matemática**. A didáctica prevista para a Matemática no ensino secundário pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- Material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, construídos em diversos materiais: placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico, “polydron”, sólidos de enchimento,...);
- Quadro quadriculado e papel milimétrico;
- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- Livros para consulta e manuais (que devem estar disponíveis na biblioteca das escolas);
- Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...).

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, institutos, cooperativas,...) incluindo em formato de CD-ROM e na Internet;

- Calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas;
- Computadores;
- Sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Os recursos escolhidos deverão ter em vista tanto a sua utilização na própria sala do Laboratório de Matemática, como uma utilização de recursos adequados em salas de aulas indiferenciadas. Nesse sentido, é considerado indispensável neste programa o uso de

- calculadoras gráficas (para trabalho regular na sala de aula ou para demonstrações com todos os estudantes, usando uma calculadora com "view-screen");
- uma sala de computadores com programas adequados para trabalho tão regular quanto possível;
- um computador ligado a um "data-show" ou a um projector de vídeo para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os estudantes ao mesmo tempo.

2.5.1 Tecnologia

Não é possível atingir os objectivos gerais e competências deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes traçam uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo, embora não seja exigível que se tratem todas simultaneamente e em todas as ocasiões; em particular, recomenda-se a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, em algumas situações, os estudantes tentarem identificar "modelos matemáticos que permitam a sua interpretação".

Uso de calculadoras gráficas

As calculadoras gráficas (que são também calculadoras científicas completíssimas), ferramentas que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas essencialmente como meios incentivadores do espírito de pesquisa. Tendo em conta a investigação e as experiências realizadas até hoje, há vantagens em que se explorem com a calculadora gráfica os seguintes tipos de actividade matemática:

- abordagem numérica de problemas;
- uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;

- uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;
- modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
- condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas;
- estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
- antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
- investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade; é importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a "copiar" o que vêem.

Uso de computadores

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da Geometria dinâmica e da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa. Vários tipos de programas de computador são muito úteis e enquadram-se no espírito do programa. Programas de Geometria Dinâmica, de Cálculo Numérico e Estatístico, de Gráficos e Simulação, de Álgebra Computacional, fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a estudantes. O número de programas disponíveis no mercado português aumenta constantemente. Neste sentido recomenda-se enfaticamente o uso de computadores, tanto em salas onde os estudantes poderão ir realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional (nomeadamente nos **Laboratórios de Matemática**), além do partido que o professor pode tirar como ferramenta de demonstração na sala de aula usando um "data-show" com retroprojector ou projector de vídeo. Os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a frequência possível de acordo com o material disponível. Nesse sentido as escolas são incentivadas a equipar-se com o material necessário para que tal tipo de trabalhos se possa realizar com a regularidade que o professor julgar aconselhável.

Uso da internet

Estando todas as Escolas Secundárias ligadas à Internet o professor não deve deixar de tirar todo o partido deste novo meio de comunicação. Na bibliografia final são indicados alguns sítios recomendados; esses sítios contêm ligações para muitos outros sítios de interesse. Para o trabalho com os estudantes apresentam-se como exemplos proveitosos

os de projectos como "Pergunta Agora" ou "Investiga e Partilha" onde os estudantes podem colocar dúvidas ou partilhar a resolução de problemas (os projectos podem ser acedidos a partir da página da APM-Associação de Professores de Matemática). Como exemplo de um projecto de interesse geral para professores e estudantes e para divulgação da Matemática aponta-se o do projecto "Atrator-Matemática Interactiva" que pode ser visto em: <http://www.fc.up.pt/atractor>

Deve ser explorada a utilização da Internet como forma de criação de uma boa imagem da Matemática. A participação em projectos internacionais é uma dessas formas. Algumas possibilidades são a comemoração do *dia do PI*, a participação no *Maior Acontecimento de Matemática do Mundo* e a participação na *Caça ao Tesouro* na Internet; indicações sobre essas actividades podem ser vistas, respectivamente, em:

http://www.exploratorium.edu/learning_studio/pi/

<http://www.nctm.org/about/wlme/>

<http://softciencias.ccg.pt/>

3 Desenvolvimento do programa

3.1 Temas Transversais

Neste programa, assumem importância significativa técnicas e estratégias de que os estudantes se devem apropriar progressivamente e que atravessam o programa de todo o ciclo de forma transversal.

A aprendizagem matemática dos estudantes passa por fases intuitivas e informais, mas o professor deve ir educando os alunos no uso de uma linguagem tão correcta quanto possível, sem que, em algum momento, se confunda o grau de precisão de um conceito com qualquer grau de "simbolização".

Um conceito matemático pode estar completa e rigorosamente compreendido expresso em língua natural ou em linguagem matemática ordinária que é uma mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática. A escrita simbólica pode e deve ser utilizada se não prejudicar a compreensão e permitir aumento de precisão, clareza e economia na comunicação com significado. O trabalho com aspectos da História da Matemática pode e deve ser realizado sempre que possível. Ao longo do programa dão-se algumas pistas para esse trabalho, que amplia a compreensão dos assuntos matemáticos com os dados da sua génese e evolução ao longo do tempo. Outro trabalho que deve ser levado em conta para o ensino e aprendizagem é todo aquele que esclareça conexões (aplicações, modelação) e providencie ligações com os problemas, actividades investigativas e situações realistas que interessem aos estudantes. A utilização da tecnologia no ensino da Matemática obriga a que, à medida que for sendo necessário e se justifique, se vá esclarecendo o funcionamento das calculadoras e computadores e as características de cada aplicação informática útil à matemática, ao mesmo tempo que se devem revelar e explicar as limitações da tecnologia disponível.

Desenvolvimento dos temas e indicações metodológicas

- Reflexão sobre as heurísticas de Polya para a resolução de problemas. Actividades investigativas.

A organização da heurística de Polya (de Guzmán, ou outra) para a resolução de problemas deve aparecer após a resolução de vários problemas e depois dos estudantes discutirem os procedimentos usados. Elas servirão como pano de fundo organizacional do pensamento para atacar os problemas, de modo a que os estudantes não esqueçam qualquer fase importante. É fundamental que os estudantes se apercebam da necessidade de um plano, e que, sem que eles abandonem a criação dos seus próprios estilos de organização e a experiência já existente, compreendam que o conhecimento destas heurísticas vai permitir melhorá-los. Estas organizações de pensamento são úteis para todos os aspectos da vida e não só para a Matemática. Sempre que possível, e no desenvolvimento do programa são indicadas oportunidades para isso, os estudantes devem ser envolvidos em actividades de natureza investigativa genérica ou ligadas a problemas de interesse histórico.

- História da Matemática

Actividades com uma perspectiva histórica humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção. Proporcionam, também, excelentes oportunidades para pesquisa de documentação. A informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura.

- Comunicação Matemática

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as actividades tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica. É necessário proporcionar ao estudante oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo. Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ..., devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

- Aplicações e Modelação Matemática

As aplicações e os problemas extraídos do mundo real estão no centro deste programa. Sempre que possível, o professor deve estabelecer conexões entre os diversos temas matemáticos do currículo e com outras ciências. Este trabalho não deve resumir-se ao enunciado e resolução de problemas realistas que usam conhecimentos de diversas ciências. Deve ser discutido com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.

- Tecnologia e Matemática

A dimensão gráfica constitui uma componente incontornável do trabalho matemático, pelo que é importante o uso de tecnologia adequada (calculadora gráfica ou computador). O uso de tecnologia facilita uma participação activa do estudante na sua aprendizagem. O estudante deve contudo ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia. É preciso ter presente que a "tecnologia" em si não está em causa como conteúdo de ensino, mas que são as aprendizagens que ela pode proporcionar que justificam o seu uso.

O recurso à tecnologia pode auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos matemáticos e prepará-los para usar a matemática num mundo cada vez mais tecnológico. Como qualquer ferramenta, a tecnologia pode ser utilizada de um modo mais ou menos rico. Nunca deve ser utilizada como simples substituição de raciocínios básicos, mas sim de modo a enriquecer a aprendizagem matemática, tornando-a mais profunda. Um estudante deverá registar por escrito, com os comentários julgados adequados, as observações que fizer ao usar a calculadora gráfica, o computador ou outro material, descrevendo com cuidado as propriedades constatadas e justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados (desenvolvendo-se assim tanto o espírito crítico como a capacidade de comunicação matemática).

3.2 10^o Ano

Módulo inicial – Resolução de problemas de geometria

9 aulas de 90 minutos

O professor deverá propor neste módulo problemas ou actividades aos estudantes que permitam consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3^o ciclo de modo tanto a detectar dificuldades em questões básicas como a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o ensino Secundário. Poderá partir de uma determinada situação, de um determinado tema, procurando evidenciar conexões com outros temas, tomando como meta o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática. Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o estudante vê as conexões, quando se apercebe que se está a falar da mesma coisa encarando-a de diferentes pontos de vista. Se os estudantes estão a explorar, por exemplo, um problema de geometria poderão estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar, mas também poderão estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou a trabalhar com expressões algébricas. Os problemas a tratar neste módulo devem integrar-se essencialmente nos temas Números, Geometria e Álgebra deixando para outra altura os problemas que se integrem no tema Funções ou Probabilidades e Estatística.

Pretende-se que os problemas a propor ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação. Todas as actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos concretos.

A seguir são apresentados enunciados dos problemas que deverão ser propostos aos estudantes. Esta lista pode ser parcial ou totalmente substituída por outra que, em termos gerais, contemple os mesmos conhecimentos e capacidades; esses outros problemas deverão, de preferência, ser retirados de documentos oficiais relativos ao Ensino Básico.

- Construção de caixas sem tampa, a partir de uma folha rectangular. Medidas de grandezas associadas a essas caixas.

- Porque é que há só 5 sólidos platónicos?
- Que relação existe entre o volume de um cubo com o do tetraedro cujas arestas são as diagonais faciais do cubo? Que polígonos é possível obter cortando um tetraedro por um plano paralelo a duas arestas? Qual o perímetro e a área dos polígonos que constituem as secções?
- Estudo da possível "semelhança" entre garrafas de água de uma dada marca de 33cl, 50cl, 75cl e 1,5l.
- Que efeito tem uma redução de 50% numa fotocopiadora?

Alguns destes problemas poderão ser substituídos, com vantagem, por actividades ou problemas ligados ao mundo real, propostos e planificados por um grupo de professores do conselho de turma de modo a integrar na sua resolução conhecimentos de várias disciplinas.

Tema I – Geometria no Plano e no Espaço

14 aulas de 90 minutos

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita. É aconselhável que os estudantes realizem pequenas investigações e façam depois relatórios utilizando linguagem matemática rigorosa (o que não significa que se deva recorrer à linguagem simbólica).

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo, com prejuízo absoluto do ponto de vista axiomático. O professor deve propor actividades de construção, de manipulação de modelos e ligadas a problemas históricos fazendo surgir a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar. A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos.

Devem dar-se a conhecer problemas históricos e propor ao estudante a resolução de pelo menos um. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria à qual estão ligados os nomes dos maiores matemáticos de todos os tempos (Euclides, Arquimedes, Newton, Descartes, Euler, Hilbert, entre muitos outros).

Os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de problemas concretos.

Mesmo quando há lugar a resolver um problema por via analítica o professor deve incentivar o esboço de figuras geométricas de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver capacidades de representação, ou seja, não se deve deixar que o estudante se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas. Para além disso,

deve apelar-se sempre à descrição, com algum detalhe, do processo utilizado, justificando-o adequadamente.

Devem apresentar-se aos estudantes problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspectiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de geometria dinâmica).

Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve prolongar-se noutros temas. Todas as actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos concretos.

Desenvolvimento do tema e indicações metodológicas

■ Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço

(esta resolução de problemas serve para fornecer ao estudante o alargamento de experiências de índole geométrica mostrando-lhe a importância e o papel da matemática como criadora de modelos que permitem interpretar e compreender a realidade)

Eis alguns dos tópicos que poderão ser estudados na resolução de problemas ou em investigações:

- estudo de alguns padrões geométricos planos (frisos);
- estudo das pavimentações regulares;
- estudo de alguns problemas de empacotamento;
- composição e decomposição de figuras tridimensionais;
- um problema histórico e sua ligação com a História da Geometria.

Devem ser utilizados exemplos concretos como barras de tapetes de Arraiolos, azulejos, mosaicos (como os de Conímbriga) ou padrões geométricos africanos (*sipatsi, lusona, etc.*).

Estes tópicos devem ser trabalhados recorrendo à manipulação de figuras geométricas.

A análise de frisos, pavimentações e empacotamento permite explorar transformações geométricas, áreas e volumes e efectuar estimativas.

Observe-se que as actividades com cortes em cubos podem ser trabalhadas aqui desde que os professores entendam que se adequam mais ao respectivo curso tecnológico do que as actividades com frisos, pavimentações e empacotamento.

■ O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço

- Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço.

Correspondência entre o plano e \mathbb{R}^2 , entre o espaço e \mathbb{R}^3 .

O professor deve propor ao estudante actividades que o levem a sentir a necessidade e vantagem do uso de um referencial, quer no plano quer no espaço. O professor pode fornecer figuras e/ou um referencial numa grelha e pedir a colocação da figura ou do referencial para obter "as melhores coordenadas" experimentando com várias figuras no plano e no espaço. Será vantajoso que o professor aproveite os problemas com que iniciou a unidade, recorrendo aos modelos já utilizados para fazer aparecer as novas noções levando o estudante a justificar determinadas proposições por mais de um processo. No plano, o estudante deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente ao eixo das abcissas, ao eixo das ordenadas e à bissetriz dos quadrantes ímpares. No espaço, o estudante deve descobrir as relações entre pontos simétricos relativamente aos planos coordenados e aos eixos coordenados.

- Equação reduzida da recta no plano e equação $x = x_0$.

O conhecimento da equação reduzida da recta deverá permitir que o estudante saiba escrever a equação de qualquer recta cujo gráfico lhe seja apresentado, sem para isso ser necessário fazer exercícios repetitivos.

Tema II - Funções e Gráficos - Generalidades. Funções polinomiais.

14 aulas de 90 minutos

Os conhecimentos sobre funções, que os estudantes devem trazer do terceiro ciclo do ensino básico, vão ser ampliados com o estudo das funções quadráticas e cúbicas; estas serão estudadas num contexto de modelação matemática, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia ou de outras disciplinas.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de função pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

Ao usar a calculadora gráfica ou o computador, os estudantes devem:

- observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas da representação gráfica;
- explorar claramente os diversos comportamentos e saber evitar conclusões apressadas;
- ser incentivados a elaborar conjecturas em função do que se lhes apresenta e ser sistematicamente treinados na análise crítica de todas as suas conclusões;
- traçar sempre um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador;
- observar que a representação gráfica depende de forma decisiva do rectângulo de visualização escolhido.

Um estudante deve ser confrontado com situações em que os erros de aproximação conduzam a resultados absurdos. Como forma de evitar muitas situações dessas, deve ser feita

a recomendação genérica de nos cálculos intermédios se tomar um grau de aproximação substancialmente superior ao grau de aproximação que se pretende para o resultado.

Pré-Requisitos:

Os estudantes devem conhecer a função afim, reconhecer essa função através do gráfico, esboçá-lo e conhecer algumas propriedades (monotonia e zeros de forma apenas intuitiva e usando os conhecimentos de equações). Os estudantes devem saber resolver equações e inequações do 1º grau e resolver equações do 2º grau e, obviamente, conhecer os números reais e representar intervalos de números reais.

Desenvolvimento do tema e indicações metodológicas

Resolução de problemas envolvendo funções, abrangendo progressivamente os seguintes temas:

- Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.

O estudo das funções deve começar com a análise de algumas situações de modelação matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequado).

Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras disciplinas que os estudantes frequentem – Física, Química, Economia, etc. – como de situações reais – por exemplo de recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, situações de modelação matemática e a exemplos da Geometria, devendo retomar-se alguns daqueles que foram estudados no tema anterior.

Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações.

- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:

i) funções quadráticas;

ii) funções cúbicas.

As propriedades sugeridas são: domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, limites nos ramos infinitos. Os estudantes devem determinar pontos notáveis e extremos tanto de forma exacta como de forma aproximada (com uma aproximação definida *a priori*) a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou computador.

Esse estudo deve incluir:

- a) análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);

No estudo das famílias de funções os estudantes podem realizar pequenas investigações.

- b) transformações simples de funções: dada a função, esboçar o gráfico das funções definidas por $y = f(x)+a$, $y = f(x+a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, com a positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

O estudo das transformações simples de funções deve ser feito tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica ou computador; a função f tanto pode ser dada a partir de um gráfico como a partir de uma expressão analítica.

- (opcional) Estudo elementar de polinómios interpoladores.

Tema III - Estatística

15 aulas de 90 minutos

Algumas das noções que se tratam nesta unidade já foram abordadas no 3º ciclo e, por isso, é possível em qualquer altura reinvestir nestes conhecimentos e completá-los progressivamente.

O estudante deverá ficar a saber organizar, representar e tratar dados recolhidos em bruto (ou tabelados) para daí tirar conclusões numa análise sempre crítica e sempre consciente dos limites do processo de matematização da situação. É importante que o estudo da Estatística contribua para melhorar a capacidade dos estudantes para avaliar afirmações de carácter estatístico, fornecendo-lhes ferramentas apropriadas para rejeitar quer certos anúncios publicitários quer notícias ou outras informações em que a interpretação de dados ou a realização da amostragem não tenha sido correcta.

Este tema fornece uma excelente oportunidade para actividades interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor ao definir o plano de trabalho com os estudantes incentivá-los a recorrer ao computador. No final, os estudantes devem interpretar e comunicar os resultados à turma fazendo uma análise crítica e estando conscientes que modos diferentes de apresentar as conclusões podem alterar a mensagem.

No estudo deste tema o estudante deve recorrer à calculadora gráfica ou ao computador e às suas potencialidades para resolver muitos dos problemas.

Pré-Requisitos:

Estatística do 3º ciclo do Ensino Básico.

Desenvolvimento do tema e indicações metodológicas

■ Estatística - Generalidades

- Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna. Clarificação de quais os fenómenos que podem ser objecto de estudo estatístico; exemplificação de tais fenómenos com situações da vida real, salientando o papel relevante da Estatística na sua descrição.

Deve-se chamar a atenção para o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento.

- Recenseamento e sondagem. As noções de população e amostra. Compreensão do conceito de amostragem e reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas; distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Noções intuitivas sobre as escolhas de amostras, sobre a necessidade de serem aleatórias, representativas e livres de vícios de concepção.

Sendo a Estatística a Ciência que trata dos "dados", num procedimento estatístico estão envolvidas, de um modo geral, duas fases: uma fase de organização dos dados recolhidos, em que se procura reduzir, de forma adequada, a informação neles contida – Estatística Descritiva, e uma segunda fase, em que se procura tirar conclusões e tomar decisões para um conjunto mais vasto, de onde se recolheram os dados – Inferência Estatística. Existe, no entanto, uma fase pioneira, que diz respeito à aquisição dos próprios "dados". Deve-se realçar a importância de, ao iniciar qualquer estudo estatístico, proceder cuidadosamente ao planeamento da experiência que conduz à recolha dos "dados" que serão objecto de tratamento estatístico.

- Estatística Descritiva e Estatística Indutiva.

■ Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)

- Análise gráfica de atributos qualitativos (gráficos circulares, diagramas de barras, pictogramas); determinação da moda.
- Análise de atributos quantitativos: variável discreta e variável contínua. Dados agrupados em classes.
- Variável discreta; função cumulativa.
- Variável contínua: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráficos (histograma, polígono de frequências); função cumulativa.
- Medidas de localização de uma amostra: moda ou classe modal; média; mediana; quartis.
- Medidas de dispersão de uma amostra: amplitude; variância; desvio padrão; amplitude interquartis.
- Discussão das limitações destas estatísticas.
- Diagramas de "extremos e quartis".

Deve-se chamar a atenção para o facto de que a organização dos dados, consiste em resumir a informação neles contida através de tabelas, gráficos e algumas medidas, a que damos o nome de "estatísticas". Nesta fase, em que se substitui todo o conjunto dos dados, por um sumário desses dados, devem-se tomar as devidas precauções, pois nem todos os instrumentos de redução de dados se aplicam a todos os tipos de dados. Assim, de entre esses processos deve-se ter presente quais os mais adequados e em que situações é ou não conveniente aplicá-los. A título de exemplo referimos o facto de não ter qualquer sentido calcular a média para dados de tipo qualitativo, mesmo que as diferentes categorias assumidas pela variável em estudo estejam representadas por números.

■ Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)

- Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação; exemplos gráficos de correlação positiva, negativa ou nula.
- Coeficiente de correlação e sua variação em $[-1, 1]$.
- Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física.
- Ideia intuitiva de recta de regressão; sua interpretação e limitações.

Generalizando o estudo de uma única variável, faz-se uma introdução ao estudo dos dados bivariados, insistindo na representação gráfica sob a forma do diagrama de dispersão ou diagrama de pontos. Quando, a partir desta representação, se verificar uma tendência para a existência de uma associação linear entre as duas variáveis em estudo, identifica-se uma medida que quantifica o grau de associação - o coeficiente de correlação, assim como se apresenta um modelo matemático que permitirá, conhecido o valor de uma das variáveis, obter uma estimativa para o valor da outra variável.

Bibliografia

Abrantes, P.; Ponte, J.P. et al. (1999) *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Grupo "Matemática para todos-investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática

Este livro reúne um conjunto de artigos elaborados no âmbito do Projecto "Matemática para Todos" à volta da incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, de actividades de natureza investigativa realizadas pelos estudantes. Segundo os organizadores dos volumes (este e seguinte), "as actividades de investigação podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática". De acordo com os organizadores dos livros "o trabalho realizado por este projecto confirma as potencialidades da actividade investigativa para a aprendizagem da Matemática e dá muitas pistas sobre o modo como ela se pode inserir nas actividades das escolas".

Abrantes, P.; Leal, L. C.; Ponte, J.P. et al. (1996) *Investigar para aprender matemática*. Grupo "Matemática para todos-investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ver comentário a *Investigações matemáticas na aula e no currículo*.

Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática Col. Ciência Aberta*, Vol. 98 (2ª ed., 1998). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é "um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação" ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática "mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real". Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

Departamento de Educação Básica (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

Esta publicação do Departamento de Educação Básica constitui uma importante fonte de informação sobre a Matemática do ensino básico em Portugal absolutamente necessária para quem lecciona no ensino secundário.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM. (1999) *Estatística e Calculadoras Gráficas*. Grupo de trabalho T3-Portugal APM. Lisboa: APM

Esta publicação contém actividades sobre Estatística, redigidas tendo em vista uma possível utilização na sala de aula; contém ainda comentários sobre as actividades e propostas de resolução das mesmas.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM. (1999). *Modelação no Ensino da Matemática - Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém actividades de modelação matemática para utilização na sala de aula; umas actividades são facilmente realizadas com a ajuda de uma calculadora gráfica e as outras necessitam da utilização de sensores para recolha de dados experimentais; são incluídos comentários e resoluções das actividades. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem funções definidas por ramos, regressão, optimização, funções exponenciais e trigonométricas e função quadrática. A publicação contém um texto introdutório sobre o processo de modelação matemática e a ligação entre a modelação matemática e a modelação no ensino da matemática; o texto situa ainda a modelação matemática no contexto dos actuais programas do ensino secundário.

Hughes-Hallett, Deborah; Gleason, Andrew M. et al. (1997) *Cálculo* vol. 1. Rio de Janeiro: LTC (1997) .

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: *A Regra de Três* (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o *Modo de Arquimedes* (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão seguramente boas inspirações a qualquer professor.

Loureiro, C. (coord.), Franco de Oliveira, A., Ralha, E. e Bastos, R. (1997). *Geometria: Matemática – 10^o ano de escolaridade*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática B, pelo que é de consulta indispensável.

Martins, M. E. G. (coord.), Monteiro, C., Viana, J. P. e Turkman, M. A. (1997). *Estatística: Matemática – 10^o ano de escolaridade*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática B, pelo que é de consulta indispensável.

Moore, David(1966). *Introduction to the Practice of Statistics*. New York: Freeman

Livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário.

Moore, David(2000). *Statistics, The Science of Data For all Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World, Part II*, 5th ed. New York: Freeman.

Livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário.

Moore, David(1966). *The Basic Practice of Statistics*. New York: Freeman

Livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário.

Ponte, J. P.(coord.), Boavida, A. M., Graça, M. e Abrantes, P. (1997) *Didáctica: Matemática – ensino secundário*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática B, pelo que é de consulta indispensável.

Ponte, J.P.; Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias* (Universidade Aberta, Vol 128). Lisboa: UA.

Este livro fornece uma excelente panorâmica da utilização das novas tecnologias na Matemática e na aula de Matemática. É apresentada uma perspectiva histórica da utilização das tecnologias na matemática sendo discutidos bastantes exemplos em várias áreas curriculares (números, funções, geometria, estatística e probabilidades) e analisados com algum detalhe vários tipos de programas de computador (jogos, folhas de cálculo, linguagem LOGO, programas de geometria dinâmica). É certamente uma obra de muito interesse para qualquer professor de Matemática pela ampla perspectiva que oferece.

Ponte, J. P.(coord.), Brunheiro, L., Abrantes, P. e Bastos, R. (1998) *Projectos Educativos: Matemática – ensino secundário*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática B, pelo que é de consulta indispensável.

Sebastião e Silva, J.(1975-78). *Compêndio de Matemática* (5 vols) Lisboa: MEC – GEP.

Os Compêndios de Matemática de Sebastião e Silva são referências obrigatórias e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados no ensino secundário.

Sebastião e Silva, J.(1975–77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 vols). Lisboa: MEC – GEP.

Estes livros são o ponto de referência de muitos aspectos deste programa e constituem material base indispensável para o trabalho dos professores. As "Normas Gerais" contidas no 1º volume do Guia devem ser objecto de reflexão por parte dos professores. Na primeira dessas Normas pode ler-se: "A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos estudantes é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os estudantes e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".

Stewart, Ian (1996). *Os Problemas da Matemática*. Ciência Aberta, Vol. 72, 2ª ed. Lisboa: Gradiva

O que é a Matemática? Segundo Ian Stewart a Matemática é sobre ideias não sobre símbolos e contas que são apenas ferramentas do ofício. O objectivo da matemática é perceber como diferentes ideias se relacionam entre si, pondo de lado o acessório e penetrando no âmago do problema. A Matemática não se preocupa apenas com a obtenção da resposta certa, mas sobretudo com o perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma. Ainda segundo Ian Stewart há, pelo menos, cinco fontes distintas de ideias matemáticas: número, ordenação, forma, movimento e acaso. Os problemas são a força motriz da Matemática, sendo os exemplos outra fonte importante de inspiração da Matemática, conforme assinala o mesmo autor.

Struik, D. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Este livro é uma referência clássica na História da Matemática, recomendando-se a segunda edição por conter um anexo relativo à História da Matemática em Portugal.

Teixeira, P. (coord.), Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. e Nápoles, S. (1997). *Funções: Matemática – 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática B, pelo que é de consulta indispensável.

Valadares, J.; Graça, M. (1998) *Avaliando ... para melhorar a aprendizagem* Lisboa: Plátano.

Este livro, de muito interesse para qualquer professor de Matemática, analisa diversos aspectos teóricos e práticos da avaliação, sem esquecer uma perspectiva histórica. Contém numerosos exemplos de construção de variados tipos de itens de avaliação (e não só para a Matemática). Analisa com bastante pormenor as diferentes fases do processo de avaliação e as características fundamentais dos instrumentos de avaliação (como a validade e a fidelidade).

Veloso, Eduardo(1998). *Geometria - Temas actuais – Materiais para professores Col. "Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário"*, vol. 11. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda

a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc." Este livro tem já um "prolongamento" na Internet no endereço

<http://www.iie.min-edu.pt/iie/edicoes/livros/cdces/cdces11/index.html> .

Vieira, A.; Veloso, E.; Lagarto, M. J. (org.).(1997) *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

Este livro contém a tradução de três textos essenciais para quem queira reflectir nas vantagens de uso da História da Matemática na sala de aula: "Porquê estudar História da Matemática" de Dirk Struik, "A utilização da História em Educação Matemática" de John Fauvel e "Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática" de Frank Swetz.

CD-ROM

Fiolhais, C; Paiva, J. (coord).(1998).*CD-ROM – Omniciência 98* Coimbra: Soft-Ciências.

Este CD contém dois programas de Matemática (relacionados com trigonometria e fractais), vários programas de Física com interesse para a Matemática (como o programa Kepler que simula o movimento de estrelas e planetas) e vários textos relacionados com a História da Matemática.

Teodoro, V. et al. *CD-ROM – Software Educativo para Física e Matemática* Lisboa: DEP-GEF/ME.

Este CD contém 10 programas para ambiente "Windows", quase todos com muita relevância para o ensino da matemática no secundário. Destacamos um programa de Estatística, um de Geometria Descritiva (o GD) que, com uma linguagem simples, permite construir sólidos e rodá-los no espaço, o programa Thales e vários programas com interesse para o estudo das funções (envolvendo situações de modelação com funções).

Páginas na INTERNET

Associação de Professores de Matemática

<http://www.apm.pt/>

Esta página contém a indicação dos projectos que APM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.

Departamento do Ensino Secundário – Matemática no Secundário

<http://www.mat-no-sec.org>

O Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação ao criar este espaço, pretende dar uma ajuda a todos os professores na recolha de informações úteis à sua prática pedagógica, contribuindo para a sua auto-formação e actualização. Nesta página poderá encontrar os Programas de Matemática do Ensino Secundário (Programa Ajustado), as Brochuras de apoio à concretização das orientações curriculares, o InforMat, boletim de informação, divulgação e debate do ensino da Matemática, apresentação de actividades a desenvolver na sala de aula e de actividades interactivas prontas a serem utilizadas, os endereços de páginas da Internet com informações úteis sobre a Matemática e a Educação Matemática e destaques com notícias e informações úteis

Miguel de Guzmán Ozámiz

<http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm>

Esta página é um manancial inesgotável de informação relacionada com a Matemática o seu ensino e a sua história. Salientamos o curso "Laboratório de Matemática", as actividades de Geometria com o DERIVE e os textos de divulgação da Matemática.

Mocho e Mocho Sábio

Centro de Competência Nónio século XXI "Softciências"

<http://softciencias.ccg.pt/mocho/>

Esta página contém um índice de páginas sobre Matemática em língua portuguesa; o Mocho Sábio contém páginas especialmente recomendadas pela sua qualidade científica e pedagógica.

Modellus web page

Vítor Teodoro (SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)

<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais e ficheiros de actividades que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática do secundário.

Projecto ALEA

Instituto Nacional de Estatística e Escola Secundária Tomaz Pelayo

<http://alea-estp.ine.pt/>

Esta página contém documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do ensino secundário. Além de uma série de páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, tem páginas com temas de actualidade relacionados com a Estatística, jogos didácticos, um forum de discussão e uma Galeria Virtual com trabalhos de escolas.

Reajustamento do Programa de Matemática

<http://www.terravista.pt/AguaAlto/5783>

Esta página da Internet irá contendo indicações de apoio a este programa, como materiais de apoio e listas de endereços com interesse para professores e estudantes.

Sociedade Portuguesa de Matemática

<http://www.spm.pt/~spm>

Esta página contém a indicação dos projectos que SPM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.