MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA A
12º ANO

**Cursos Gerais de Ciências Naturais,
de Ciências e Tecnologias e de Ciências Sócio-Económicas**

Autores
Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)
Maria Graziela Fonseca
Arsélio Almeida Martins
Cristina Maria Cruchinho da Fonseca
Ilda Maria Couto Lopes

Matemática A

Programa do 12º Ano

Tema I – Probabilidades e Combinatória

30 aulas de 90 minutos

As probabilidades fornecem conceitos e métodos para estudar casos de incerteza e para interpretar previsões baseadas na incerteza. Este estudo, que pode ser em grande parte experimental, fornece uma base conceptual que capacita para interpretar, de forma crítica, toda a comunicação que utiliza a linguagem das probabilidades, bem como a linguagem estatística. As técnicas de contagem que aqui aparecem como auxiliar do cálculo de probabilidades constituem uma aprendizagem significativa por si só, especialmente se desenvolverem mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas. Considera-se ainda que o tema das Probabilidades constitui uma boa oportunidade para a introdução de uma axiomática, uma das formas de organizar uma teoria matemática, permitindo que os estudantes tenham uma melhor compreensão do que é a actividade demonstrativa em Matemática. Finalmente, qualquer destes assuntos é bom para prosseguir objectivos de trabalho em aspectos da História da Matemática. Saliente-se que há muitos exemplos históricos interessantes no cálculo de probabilidades. É aconselhável a leitura da brochura de apoio a este tema.

Pré-requisitos:
Noções elementares sobre conjuntos,
Probabilidades do 3º Ciclo do Ensino Básico.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
Introdução ao cálculo de Probabilidades: ■ Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos. ■ Operações sobre acontecimentos. ■ Aproximações conceptuais para Probabilidade: – aproximação frequencista de probabilidade; – definição clássica de probabilidade ou de Laplace. – definição axiomática de probabilidade (caso finito); propriedades da probabilidade. ■ Probabilidade condicionada e independência; probabilidade da intersecção de acontecimentos. Acontecimentos independentes.	Experiências que permitam tirar partido de materiais lúdicos e de simulações com a calculadora contribuirão para esclarecer conceitos através da experimentação e para dinamizar discussões de tipo científico, bem como para incentivar o trabalho cooperativo. A simulação e o jogo ajudam a construir adequadamente o espaço dos resultados e a encontrar valores experimentais para a probabilidade de acontecimentos que estão a ser estudados. É importante incentivar o estudante, sempre que possível, a resolver os problemas por vários processos, discutindo cada um deles com o professor e com os restantes colegas de modo a poder apreciar cada uma das formas de abordar o problema. O professor deve solicitar, frequentemente, que descrevam com pormenor, oralmente e por escrito, os raciocínios efectuados. É aconselhável elaborar boas formas de registo para os resultados das suas experiências de modo a poderem ser partilhadas em grupo. A axiomática das Probabilidades, por ser curta, permite alguns exercícios de verificação simples, capazes de motivar a apropriação da utilidade deste tipo de abordagem matemática. O facto de tanto as definições frequencista e clássica de probabilidade como a probabilidade condicionada satisfazerem a axiomática das Probabilidades permite compreender melhor o papel de uma axiomática em Matemática.
Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades. ■ Variável aleatória; função massa de probabilidade: – distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta; distribuição de frequências versus distribuição de probabilidades; – média versus valor médio; – desvio padrão amostral versus desvio padrão populacional. ■ Modelo Binomial. ■ Modelo Normal; histograma versus função densidade.	Os estudantes já sabem como descrever os acontecimentos associados a uma experiência aleatória usando o espaço ou conjunto de resultados e sabem, ainda, como determinar a probabilidade de acontecimentos. Ora é muitas vezes necessário associar a uma experiência aleatória (associada a um modelo de probabilidade) valores numéricos pelo que é importante introduzir o conceito de variável aleatória bem como o de função massa de probablidade. Os estudantes poderão utilizar simulações para construir distribuições empíricas de probabilidades. É importante que compreendam a relação entre as estatísticas e os parâmetros populacionais. Não é objectivo do programa entrar no estudo das variáveis contínuas mas o estudante poderá investigar se não haverá nenhuma representação que seja para a população o equivalente ao histograma na amostra. Das distribuições contínuas a mais conhecida foi obtida pelo matemático Gauss e tem hoje um papel importante já que muitos processos de inferência estatística a têm por base.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
Análise Combinatória ■ Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações. ■ Triângulo de Pascal. ■ Binómio de Newton. ■ Aplicação ao cálculo de probabilidades.	No caso das contagens que sejam facilitadas por raciocínios combinatórios, é aconselhável que os estudantes comecem por contar os elementos um a um, utilizando exemplos (desde os mais simples até aos mais complicados), até que reconheçam a utilidade dos diagramas e depois das organizações simplificadoras. Os exemplos de conjuntos para a contagem podem surgir de situações problemáticas que lhes forem sendo propostas. Mesmo o triângulo de Pascal pode ser introduzido a partir de problemas. Muitos problemas postos podem e devem resultar da análise de jogos conhecidos. Os raciocínios combinatórios facilitam a abordagem de propriedades envolvendo combinações, mas não deve ser desprezada a ideia de, caso seja possível, introduzir conexões matemáticas - com métodos recursivos e fazendo alguma demonstração por indução matemática. Pascal, Tartaglia e Laplace são exemplos "interessantes" para realizar incursões na história dos conceitos matemáticos, na vida dos matemáticos, nas ligações da Matemática com outros ramos de saber e actividade. É importante referir que muitos resultados de contagens já eram conhecidos anteriormente noutras civilizações (por exemplo, o triângulo de Pascal era conhecido na China vários séculos antes de Pascal)

Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial II

30 aulas de 90 minutos

Aqui são estudados de forma mais rigorosa conceitos já utilizados antes de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada. O estudo das funções é ampliado com as funções exponencial e logarítmica.
Vários conceitos deste tema são importantes noutras disciplinas como "Física", "Química", "Economia" e "'Geografia". Por isso é bastante importante haver uma colaboração estreita entre os professores de Matemática e os das outras disciplinas. A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização das actividades comuns ou a leccionação de algum aspecto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores.

Pré-requisitos:
Funções e Gráficos do 10º ano.
Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11º ano.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
Funções exponenciais e logarítmicas ■ Função exponencial de base superior a um; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$ com $a > 1$ ■ Função logarítmica de base superior a um; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = log_a x$ com $a > 1$. ■ Regras operatórias de exponenciais e logaritmos. ■ Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.	Com as novas famílias de funções surgem, também, novas oportunidades para cada estudante obter uma maior compreensão da matemática e suas aplicações, bem como para conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores (quer dentro do mesmo tema quer com temas diferentes). É fundamental apresentar aos estudantes actividades diversificadas (ver, por exemplo, brochura de apoio ao programa sobre este tema) tendo-se em conta que a exploração com a utilização das várias tecnologias pode permitir discussões ricas, quer sobre o processo de modelação, quer sobre os conceitos matemáticos fundamentais, para além de facilitarem propostas aconselháveis de investigações. Os estudantes precisam de desenvolver a compreensão de procedimentos algébricos e utilizá-los (a par da utilização da calculadora) sem que para isso tenham que fazer exercícios repetitivos. A modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita tanto usando capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados), como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
Teoria de limites ■ Limite de função segundo Heine. Propriedades operatórias sobre limites (informação); limites notáveis (informação). Indeterminações. Assímptotas. Continuidade. ■ Teorema de Bolzano–Cauchy (informação) e aplicações numéricas.	As indeterminações são referidas apenas para mostrar as limitações dos teoremas operatórios. o programa apenas pressupõe que se levantem as indeterminações em casos simples. Dificuldade a não exceder: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-2x+1}{x^2+3}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\ ;\ \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$$ É aconselhável que os estudantes experimentem numérica e graficamente a relação entre os limites no infinito da exponencial, da potência e dos logaritmos.
Cálculo Diferencial ■ Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras). Derivadas de funções elementares (informação baseada em intuição numérica e gráfica). Segunda definição do número e. Teorema da derivada da função composta (informação). ■ Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica). ■ Estudo de funções em casos simples. ■ Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.	Derivada da função composta: grau de dificuldade a não ultrapassar $f(ax)$, $f(x+b)$, $f(x^k)$ É importante analisar em todos os teoremas a necessidade das condições do enunciado através de contra-exemplos. Deve ser adoptada a definição: f é derivável quando a derivada existe. e é o único número real tal que $(e^x)' = e^x$. O estudo de funções deve seguir o modelo que se encontra na brochura de funções pag 149 e que combina métodos analíticos com o uso da calculadora gráfica. Dificuldade a não ultrapassar: $$f(x) = 2^{-x} + 2^x, f(x) = \frac{x^2+x+1}{2x+1}, f(x) = \frac{x}{1-\log x}$$ Os estudantes poderão realizar trabalhos individuais ou em grupo de História do Cálculo Diferencial referindo o trabalho de alguns matemáticos como Fermat, Newton, Leibniz, Berkeley, Anastácio da Cunha, Bolzano, Cauchy, etc. É obrigatória a referência a José Anastácio da Cunha; com esse pretexto referir um pouco de história da Matemática em Portugal desde o tempo dos descobrimentos até à actualidade.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
■ Problemas de optimização.	Os problemas de optimização devem ser escolhidos de modo a que um estudante trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.
(*) Demonstração de alguns teoremas elementares do cálculo diferencial.	(*) Os teoremas a demonstrar devem incluir: – continuidade implica limitação numa vizinhança; – continuidade e $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ implicam permanência de sinal numa vizinhança de x; – derivabilidade implica continuidade; – derivada da potência inteira e racional e do quociente.

Tema III –Trigonometria e Números Complexos

24 aulas de 90 minutos

Completa-se, agora, o estudo da trigonometria que se estuda no ensino secundário. Pretende-se que os estudantes resolvam problemas que apelem simultaneamente ao estudo intuitivo apoiado na calculadora gráfica como ao cálculo de derivadas, em casos simples. Com pretexto de responder a problemas de resolubilidade algébrica amplia-se o conceito de número. As operações com números complexos, nas formas algébrica e trigonométrica são aproveitadas para que o estudante compreenda melhor as diferentes representações analíticas para domínios definidos geometricamente, bem como para dominar as relações entre operações algébricas e transformações geométricas. O estudante precisa dos conhecimentos de Geometria Analítica, em geral, e da Trigonometria e $\mathbb{R}$, e precisa de saber resolver equações e inequações dos 1º e 2º graus.
As funções trigonométricas são importantes noutras disciplinas como "Física" e "Química", pelo que o estudo das funções trigonométricas para os alunos dos respectivos cursos gerais deverá levar em conta este facto. Por isso, é bastante importante haver uma colaboração estreita entre os professores de Matemática e os das outras disciplinas. A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização de actividades comuns ou a leccionação de algum aspecto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores.

Pré-Requisitos:
Trigonometria do Tema "Geometria no Plano e no Espaço" do 11º ano.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
Funções seno, co-seno, tangente. ■ Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica ou computador. ■ Estudo intuitivo de $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x} \quad .$$ ■ Derivadas do seno, co-seno e tangente. ■ Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais.	As propriedades a serem investigadas, recorrendo à calculadora gráfica, são: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assímptotas, limites nos ramos infinitos. Os estudantes podem investigar, tal como o fizeram nas famílias de funções anteriores, qual a influência da mudança de parâmetros na escrita da expressão que define a função (em casos simples e se possível ligados a problemas de modelação). As derivadas do seno e do co-seno podem ser obtidas a partir das fórmulas do seno e do co-seno da soma e de que $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}=1 \quad .$$ A modelação com funções trigonométricas pode ser feita tanto usando as capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados) como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
Complexos ■ Introdução elementar de problemas de resolubilidade algébrica e do modo como se foram considerando novos números. Apropriação de um modo de desenvolvimento da Matemática, através da evolução do conceito fundamental de número. Experimentação da necessidade de i, à semelhança da aceitação da necessidade dos números negativos e fraccionários. ■ Números complexos. O número i. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos	O estudante precisa de explorar sempre que possível a ligação dos números complexos à geometria. Ela fornece uma perspectiva mais rica dos métodos geométricos com que se trabalha habitualmente – método das coordenadas, dos vectores e das transformações geométricas, bem como uma nova compreensão da demonstração, tornado possível ligar as características numéricas, algébricas e geométricas (ler a brochura referente a este tema). A introdução dos complexos deve ser ancorada numa pequena abordagem histórica, do ponto de vista dos problemas/escolhos que foram aparecendo no desenvolvimento dos estudos matemáticos. Os estudantes podem realizar trabalhos sobre a extensão do conceito de número e sobre problemas de resolubilidade algébrica, quer do ponto de vista histórico, quer do ponto de vista da sua experiência com anteriores desenvolvimentos. Será interessante a referência à impossibilidade da extensão a $\mathbb{C}$ de uma ordenação compatível com a adição e a multiplicação.
■ A forma algébrica dos complexos. Operações com complexos na forma algébrica. ■ Representação de complexos na forma trigonométrica. Escrita de complexos nas duas formas, passando de uma para outra. Operações com complexos na forma trigonométrica. Interpretações geométricas das operações. ■ Domínios planos e condições em variável complexa. (*) Demonstração de propriedades de Geometria usando números complexos	As operações com complexos podem ser definidas na base da manutenção das propriedades das operações e do quadrado de i ser -1. É aconselhável que $\|z\|$ seja introduzido de modo intuitivo, estendendo a noção de valor absoluto de um real (distância de dois pontos no eixo, distância de dois pontos no plano cartesiano) A passagem à forma trigonométrica pode ser feita com referência a outros sistemas de coordenadas. É importante explorar a multiplicação por i e as diversas operações ligadas a outras realidades matemáticas - vectores, operações com vectores, transformações geométricas. A resolução e a interpretação das soluções de condições em z, devem ajudar a compreender a utilidade dos diversos sistemas de representação analítica. O recurso a programas de geometria dinâmica pode ser motivadora para a realizaçao de demonstrações. Assim o professor deve propor que depois de investigadas sejam demonstradas propriedades de polígonos.

■