

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA A
11º ANO

**Cursos Gerais de Ciências Naturais,
de Ciências e Tecnologias e de Ciências Sócio-Económicas**

Autores

Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)

Maria Graziela Fonseca

Arsélio Almeida Martins

Cristina Maria Cruchinho da Fonseca

Ilda Maria Couto Lopes

Matemática A

Programa do 11º Ano

Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II

30 aulas de 90 minutos (10 semanas)

A trigonometria tem a sua origem no estudo da medição de triângulos. Problemas relacionados com a navegação, a topografia, a indústria de moldes, entre muitos outros, exigem a resolução de triângulos. Mais tarde ao serem estudadas as funções trigonométricas veremos aparecer o seno e o co-seno como modelos matemáticos para fenómenos periódicos tais como variações de temperatura, de marés,..., mas nesta primeira abordagem, para além da resolução de problemas que envolvam triângulos, trata-se somente de ampliar o conceito de ângulo que passa a ser encarado como "gerado" por uma semi-recta em movimento (sentido positivo ou negativo) bem como o estudo do círculo trigonométrico e a resolução de algumas equações trigonométricas simples. O tempo deve ser dedicado à compreensão dos conceitos e às aplicações ligadas a problemas reais, reduzindo-se a ênfase em exercícios de cálculo. Espera-se que, sempre que seja possível, os estudantes apropriem conceitos e técnicas matemáticas enquanto enfrentam situações, de tal modo que, face a problemas realistas possam mobilizar os conhecimentos científicos adequados para dar respostas próprias. A continuação do estudo da Geometria, com a noção de produto escalar e suas aplicações, ligado à resolução de problemas, deve permitir ao aluno melhorar as suas capacidades de visualização e representação aumentando a sua intuição geométrica. Devem continuar a explorar-se as ligações da Geometria aos outros conteúdos. Os conhecimentos adquiridos nesta unidade devem mostrar ao aluno como a linguagem das coordenadas e dos vectores lhe fornece novos utensílios para resolver problemas já abordados noutras perspectivas.

Vários conceitos deste tema (como os vectores, a trigonometria e as funções trigonométricas) são importantes na disciplina de "Física e Química". Por isso é vantajoso haver uma colaboração estreita entre os professores de Matemática e de "Física e Química" nos cursos gerais onde existam as duas disciplinas. Convém que a terminologia e resultados usados por ambos os professores seja coerente para não confundir os alunos. Convém que os exemplos usados numa disciplina sejam conhecidos pelo professor da outra disciplina para que possam ser eventualmente explorados de novo como suporte a novas aprendizagens ou actividades. A modelação matemática e as aplicações poderão ser exploradas de forma muito natural nalgum destes contextos. Poderá haver, nalgum aspecto, um aprofundamento maior do que o indicado no programa, se isso for feito em coordenação com o professor da disciplina de "Física e Química". Certos conceitos poderão ser até introduzidos na disciplina de "Física e Química" e depois consolidados na disciplina de Matemática, ainda no 11º ou apenas no 12º ano.

Pré-requisitos: Trigonometria do Ensino Básico e Geometria do 10º Ano

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Resolução de problemas que envolvam triângulos.</p> <p>■ Ângulo e arco generalizados:</p> <ul style="list-style-type: none"> – radiano; – expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos. <p>■ Funções seno, co-seno e tangente:</p> <ul style="list-style-type: none"> – definição; variação (estudo no círculo trigonométrico); – comparação de senos e co-senos de dois números reais. 	<p>No ensino básico, os estudantes tiveram contacto com a semelhança de triângulos e com a trigonometria, logo o professor deve propor, agora, problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos,...) bem como aperceberem-se da importância da Trigonometria para as várias Ciências. Os estudantes devem ser solicitados a deduzir as razões trigonométricas em $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$ radianos por se considerar que é importante que se conheçam alguns valores exactos das funções trigonométricas, nomeadamente para que mais tarde possam confirmar pontos do traçado de gráficos de funções trigonométricas. Isto não significa que se trabalhe preferencialmente com estes valores, até porque se usa a calculadora.</p> <p><u>A compreensão do círculo trigonométrico é fundamental.</u> A generalização das noções é intuída e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares pretendendo-se, agora, que, ao resolver problemas, os estudantes recordem os conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo e se enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuíveis. Pretende-se que os estudantes aprendam os conceitos de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas. É necessário que se apercebam da diferença em trabalhar por exemplo com $\text{sen}1$ em graus e radianos de modo a ter sempre bem presente em que modo está a calculadora e interpretar convenientemente os resultados. Recorrendo ao círculo trigonométrico as relações entre as funções circulares de α, $\pi/2 - \alpha$, $\pi/2 + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ e $-\alpha$, aparecem naturalmente aos estudantes mobilizando unicamente a compreensão dos conceitos já adquiridos. Não tem pois sentido que lhes sejam propostos exercícios rotineiros em que estas relações intervenham. Não vale a pena sequer privilegiar estes valores. Podem propor-se bons problemas que lhes permitam desenvolver a aptidão para reconhecer ou analisar propriedades de figuras geométricas. É importante verificar que se mantêm as relações:</p> $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1; \text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x} \quad \text{e} \quad 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$ <p>que devem ser usadas na determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno ou tangente. Equações trigonométricas elementares.</p>	<p>Recorrendo à compreensão, sempre ligada à interpretação do círculo trigonométrico, os estudantes desenvolvem a aptidão para mobilizar os conceitos já aprendidos com vista à resolução de condições simples. Assim as técnicas de resolução de equações não passam por listas exaustivas de fórmulas. Os estudantes desenvolvem a sua capacidade de transferir conhecimentos para novas situações (sempre ligadas à compreensão do círculo trigonométrico). Pode ser feita uma breve referência aos gráficos das funções trigonométricas podendo utilizar-se uma actividade de movimento circular que permita, por exemplo, passar do círculo trigonométrico para os pontos $(x, \text{sen}x)$ do plano cartesiano.</p>
<p>■ Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço: – definição e propriedades; – expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores em referencial ortonormado.</p> <p>■ Perpendicularidade de vectores e de rectas; equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vector normal.</p> <p>■ Intersecção de planos e interpretação geométrica: – resolução de sistemas; – equações cartesianas da recta no espaço.</p> <p>■ Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (interpretação vectorial).</p>	<p>Podem propor-se algumas situações do âmbito da Física como forma de recordar e ampliar alguns aspectos do cálculo vectorial, designadamente, o trabalho de uma força. Como actividades de aplicação do conceito estudado, aparecem a determinação do ângulo de duas rectas e do declive de uma recta como tangente da inclinação no caso da equação reduzida da recta no plano. Também como aplicação importante deste novo conceito, os estudantes encontrarão a condição de perpendicularidade de vectores bem como novas formas de definir conjuntos seus conhecidos (no plano: mediatriz, circunferência ou recta tangente a uma circunferência num ponto dado; no espaço: plano mediador e superfície esférica). Poderá aparecer, ainda, como aplicação do conceito de produto escalar de dois vectores a dedução da fórmula do desenvolvimento de $\cos(x - y)$.</p> <p>O aluno encontra a equação cartesiana de um plano como outra aplicação do mesmo conceito.</p> <p>As equações cartesianas da recta decorrem do estudo da intersecção de planos, embora também os estudantes as possam encontrar a partir da equação vectorial da recta estudada no 10º ano.</p> <p>Os estudantes recorrem aos conhecimentos de cálculo vectorial já adquiridos para estabelecer, partindo sempre da visualização, as condições de paralelismo e perpendicularidade no espaço.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p data-bbox="280 376 667 443">■ Programação linear - breve introdução.</p> <p data-bbox="280 479 667 546">Domínios planos – interpretação geométrica de condições</p>	<p data-bbox="692 376 1453 506">A programação linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade (e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos aprendidos no 10º e ampliados no 11º.</p> <p data-bbox="692 542 1453 913"><i>Recorda-se novamente que se dá a maior ênfase à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois, o estudante, para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas da engenharia, arquitectura,... precisa de usar intuição e raciocínios geométricos. Ao professor compete assegurar que, neste estudo da Geometria, o estudante não se limita à "manipulação" de condições desligadas de situações concretas, sem qualquer esforço de interpretação. A aprendizagem dos novos conceitos aparece ligada à resolução de problemas como prolongamento da geometria estudada no ano anterior (agora o estudante poderá justificar propriedades das figuras usando as suas representações em coordenadas)</i></p>

Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial I
 Funções racionais e com radicais.
 Taxa de Variação e Derivada

30 aulas de 90 minutos (10 semanas)

Com o uso numérico e gráfico de novas funções – racionais e envolvendo radicais – ampliam-se os conhecimentos do 10º ano relativos a funções. Tal como no 10º ano privilegiam-se funções que relacionam variáveis com significado concreto. As operações com funções são abordadas neste Tema. Serão estudadas funções inversas e funções compostas. As noções de taxa média de variação e de taxa de variação/derivada desempenham um papel central neste Tema, sendo introduzidas recorrendo a um uso informal da noção de limite.

O conceito de taxa de variação é importante para as disciplinas de "Economia" e "Física e Química" pelo que é vantajoso que seja explorado em coordenação com estas disciplinas, nos respectivos cursos gerais. A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização de actividades comuns ou a leccionação de algum aspecto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores.

Pré-requisitos: Os estudantes devem conhecer a função afim e a função definida por $f(x) = k/x$, com $k > 0$ e $x > 0$ e, evidentemente, todos os assuntos do Tema "Funções e Gráficos" abordado no 10º ano.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação</p>	<p>Este item prolonga-se por todo o Tema abrangendo progressivamente as novas classes de funções. Pretende-se que os estudantes recordem propriedades das funções e apreendam intuitivamente o conceito de taxa de variação de preferência num contexto de modelação matemática. Como exemplos sugerem-se as actividades <i>O Jogador de Ténis</i> ou <i>A bola no plano inclinado</i> – ver Brochura de Funções 11º ano (pp 99 e 100). Ao resolverem problemas como <i>O volume constante</i>, <i>O comprimento de um vinco</i>, <i>Triângulo inscrito</i> ou <i>Intensidade da luz e CBL</i> – ver Brochura de Funções 11º ano (pp 90, 117, 118 e 139)–, os estudantes deparam-se com representantes de novas famílias de funções, que aparecem como boas oportunidades para discutir as noções de domínio de funções nos contextos das situações por elas modeladas.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções:</p> $f(x) = a + \frac{b}{cx + d}.$ <p>Neste estudo enfatiza-se a análise dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.</p> <p>■ Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e de $-\infty$.</p> <p>■ Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples.</p> <p>■ Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).</p>	<p>Valem aqui indicações metodológicas semelhantes às dadas para o Tema II – Funções e Gráficos, do 10º ano, pelo que não serão repetidas.</p> <p>Sugerem-se as seguintes propriedades: <i>domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíntotas, limites nos ramos infinitos.</i></p> <p>Afigura-se necessário propor problemas envolvendo as funções anteriores e as estudadas no 10º ano, tanto sob os aspectos analíticos como numéricos e gráficos. A resolução de equações e inequações fraccionárias aparecem num contexto de resolução de problemas.</p> <p>O conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito). Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, devendo chamar-se a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso. Este conceito deve ser abordado de uma forma experimental.</p> <p>Retomando os conhecimentos de polinómios, o estudante deverá ser capaz de transformar expressões como</p> $\frac{x^2 + 2}{x + 1} \text{ em } x - 1 + \frac{3}{x + 1} \text{ ou } \frac{x + 3}{x + 1} \text{ em } 1 + \frac{2}{x + 1}$ <p>e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha em precisão, pois se efectua um número mais reduzido de operações. Por outro lado esta simplificação permite que se estude o comportamento no infinito sem necessidade de recorrer ao gráfico. Contudo, os estudantes devem efectuar este tipo de transformações e simultaneamente confirmarem pelo gráfico da função, antes de concluírem sobre o limite no infinito de uma função racional.</p> <p>Para calcular derivadas de funções simples, não é necessário invocar questões especiais sobre limites, basta recorrer à noção intuitiva. Poderemos pensar no intervalo $[x_0, x]$ ou $[x, x_0]$ e na função $f(x) = mx + b$ e $\frac{mx+b-(mx_0+b)}{x-x_0} = \frac{m(x-x_0)}{x-x_0}$ que, para $x \neq x_0$, vale m (qualquer que seja a distância $x - x_0$). Do mesmo modo, se pode pensar para a derivada de outras funções. Por exemplo, para a função $f(x) = \frac{k}{x}$, a taxa média de variação no intervalo $[a, a + h]$ é dada por</p> $\frac{\frac{k}{a+h} - \frac{k}{a}}{h} = \dots = -\frac{k}{a(a+h)}$ <p>que tende a ser $-k/a^2$, quando h tende a ser 0. A esta abordagem, está sempre associada a interpretação geométrica para a taxa média de variação e para a derivada (declives de secantes e tangentes às curvas das funções)</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.</p> <p>■ Constatação, por argumentos geométricos, de que:</p> <p><i>i.</i> se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;</p> <p><i>ii.</i> se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.</p> <p>(*) Referência à hipérbole; informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.</p> <p>■ Funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).</p> <p>■ Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.</p> <p>■ Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos. Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).</p>	<p>Podem ser propostos alguns problemas simples que envolvam derivadas num contexto de aplicações</p> <p>Constata-se que quando as tangentes à curva de uma função em todos os pontos de abscissas de um intervalo aberto do seu domínio têm declives positivos (correspondente à derivada da função ser positiva em todos os pontos do intervalo aberto) a função é crescente nesse intervalo. De modo análogo para os restantes casos. Lembre-se que se opta por considerar que uma função é derivável num ponto a do seu domínio quando o valor da derivada é real: $f'(a) \in \mathbb{R}$</p> <p>Não se pretende que os argumentos geométricos sejam apresentados como prova. Alguns resultados virão a ser demonstrados mais tarde.</p> <p>Os casos x^3 e x são bons e simples (contra-)exemplos para que os estudantes compreendam que há funções que têm derivada nula num ponto sem que nele haja extremo e que há funções com extremo que não têm derivada real no ponto em que tal acontece.</p> <p>No caso da função inversa os estudantes precisam de analisar os casos em que será possível inverter uma função (poderá ser introduzida a noção de injectividade, apenas como noção auxiliar) e devem constatar a relação entre os gráficos de uma função e da sua inversa. Será necessário introduzir a noção de raiz índice n. Tal deverá ser feito de forma algébrica. Só depois se falará na função inversa da função potência. Grau de dificuldade a não ultrapassar: $\sqrt{x+3}$, $\sqrt[3]{x+4}$</p> <p>Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal (dados os focos).</p>

Tema III – Sucessões Reais

24 aulas de 90 minutos (8 semanas)

A resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e especialmente úteis, bem como à necessidade de elaboração de representações formalizadas. Este assunto permite também, com facilidade e vantagens, a utilização intensiva de calculadoras. E permite exercícios de comunicação (pela fala e pela composição escrita). As propriedades das progressões e outras sucessões definidas por recorrência justificam a aprendizagem do método de indução matemática.

Pré-Requisitos: Os estudantes precisam de deter capacidades de cálculo elementares e devem dominar o conceito de função.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>Sucessões</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Definição e diferentes formas de representação ■ Estudo de propriedades: monotonia e limitação ■ Progressões aritméticas e geométricas: termo geral e soma de n termos consecutivos. ■ Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ <p>num contexto de modelação matemática; primeira definição do número e.</p>	<p>As sucessões aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita propondo vários problemas. Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria — por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências; da economia — por exemplo, problemas com empréstimos ou depósitos bancários com juros sobre um capital constante (ou variável); da biologia — por exemplo, cálculo do número de elementos de uma população considerado um determinado modo de reprodução de cada elemento,... O estudo das sucessões como funções de variável natural deve ser feito só depois de terem sido construídos vários exemplos/modelos. Mas a escrita de expressões para os termos gerais das sucessões deve ser procurada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. Do mesmo modo se podem introduzir as noções de termo, de ordem, ou até de razão, etc. O estudo da monotonia, minorantes, majorantes, etc pode ser feito à medida que vão aparecendo como aspectos a considerar durante a resolução dos diferentes problemas. Do mesmo modo, podem ser abordadas as propriedades de certas sucessões (progressões). Estes problemas podem ainda servir para introduzir a definição por recorrência, para casos simples.</p> <p>Os estudantes podem utilizar livremente a calculadora para procurar responder aos problemas que lhes são propostos e devem procurar formas próprias de organização e expressão para a modelação das situações. O professor deve explorar o uso da calculadora e ajudar a construir tabelas, a desenhar e a interpretar gráficos. Só depois de serem experimentadas variadas redacções, são introduzidas as redacções simbólicas consagradas. As redacções simbólicas serão testadas com exercícios rápidos</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>Limites</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Infinitamente grandes e infinitamente pequenos. ■ Limites de sucessões e convergência. <p>Noção de limite real. Ilustração de alguns resultados que justifiquem a unicidade do limite seguida da demonstração desse teorema.</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ A convergência das sucessões monótonas e limitadas . <p>Exemplos de sucessões monótonas não convergentes. Exemplos de sucessões limitadas não convergentes. Critério de majoração e teorema das sucessões encaadradas.</p> <p>■ Problemas de limites com progressões .</p> <p>(*) Estudo de casos simples de caos usando sucessões definidas por recorrência</p>	<p>Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo geral, etc. podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de seqüências de termos chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contra-exemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais concepções alternativas e erradas. É bom que os estudantes utilizem conhecimentos já adquiridos sobre algumas funções reais de variável real e os transfiram com as devidas cautelas para as sucessões. É importante que se aproveitem momentos como este para obrigar os estudantes a reflectir (pedindo-lhes contra-exemplos em que os recíprocos nem sempre são válidos.). Deste modo, os estudantes ganham confiança nos seus próprios saberes e compreendem as novas aquisições como complementares e facilitadoras, aprofundamentos das suas competências para dar respostas a situações cada vez mais complexas.</p> <p>As definições são estabelecidas em linguagem corrente seguindo as conclusões a tirar de cada exemplo e contra-exemplo. Após cada redacção em linguagem corrente deve ser estabelecida uma redacção em simbologia matemática e devem então ser aplicados exercícios rápidos em que as definições simbólicas sejam testadas.</p> <p>O estudante poderá ser solicitado a estudar, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal. Os estudantes encontrarão assim uma interessante característica das figuras fractais enquanto utilizam propriedades das progressões. Descobrirão que têm comprimento (ou superfície) infinito e uma superfície (ou volume) finita (quer a tratem no plano ou no espaço).</p>