Função logarítmica

Os estudos de astronomia e navegação no século XVI conduziram a que um grande número de matemáticos se dedicasse ao desenvolvimento da trigonometria. Uma das questões envolvidas dizia respeito a efectuar produtos de senos. Este problema foi resolvido pelo "método de prosthaphaeresis" que corresponde à fórmula

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$$

Esta fórmula permite reduzir um problema de multiplicação a uma simples questão de somas, diferenças e divisão por 2. É provável que esta fórmula motivasse Napier e outros matemáticos a desenvolverem processos de simplificação dos cálculos, sendo possível que ela tenha influenciado o trabalho de Napier, já que os primeiros logaritmos são logaritmos de senos.

Também constitui um factor do desenvolvimento dos logaritmos, o estudo exaustivo no século XV das propriedades das séries aritméticas e geométricas.

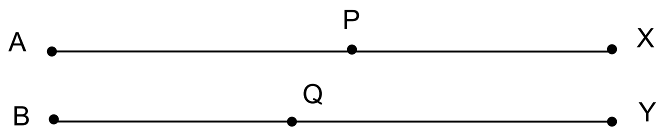
Com efeito, observando os termos de uma série aritmética de razão 1 e primeiro termo igual a 0 e uma série geométrica de razão 2 e primeiro termo igual a 1, verifica-se que os termos da série aritmética constituem os logaritmos na base 2 dos termos da série geométrica.

números	1	2	4	8	16	32	64
logaritmos	0	1	2	3	4	5	6

Esta tabela aparece num trabalho de Michael Stiefell em 1544 (6 anos antes do nascimento de Napier). Stiefell observa que a um produto de termos na série geométrica $(4 \times 8 = 32)$ corresponde uma soma de termos na série aritmética $(2+3=5)$. Assim, para simplificar o cálculo de um produto de números bastará escrevê-los como potências da mesma base.

A invenção dos logaritmos é atribuída a John Napier (Neper, Napeir, Napair, Nepeir, Naper, Napare, Naipper), barão escocês, nascido junto a Edimburgo em 1550.

A forma como Napier chegou à ideia de logaritmo não foi algébrica mas através da geometria. Considerou dois segmentos de recta AX e BY e dois pontos P e Q a moverem-se sobre eles, conforme se ilustra na figura :



Supõe-se que o ponto P se move ao longo de AX com velocidade constante, enquanto o ponto Q, que parte com a mesma velocidade que P, altera constantemente a sua velocidade de forma que, em cada instante, ela seja proporcional à distância QY. O logaritmo do número que traduz a distância de A a P será dado pelo número que traduz a distância do correspondente ponto Q a B.

Esta concepção geométrica dos logaritmos está ligada ao facto de os senos aparecerem na época de Napier como comprimento de linhas e não associados às medidas dos catetos de triângulos rectângulos.

Não se sabe ao certo quanto tempo Napier trabalhou a ideia de logaritmo antes da publicação em 1614 de um volume incluindo texto e tabelas intitulado “Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio” (Descrição da Admirável Tabela de Logaritmos).

O famoso matemático inglês Henry Briggs (1561-1631) tomou rapidamente conhecimento da obra de Napier e começou de imediato a trabalhar uma versão modificada das tabelas. A sugestão de Briggs consistia em modificar a base dos logaritmos, de forma a tornar mais fácil o seu uso. Este facto já tinha sido observado por Napier, que concordou com a sugestão de Briggs de adoptar a base 10. Briggs não acabou recalcular todos os logaritmos de Napier. Publicou em 1624 umas tabelas que continham os logaritmos de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, calculados com 14 casas decimais.

Os logaritmos na base 10, são denominados "logaritmos de Briggs" e irão ser representados por "log".

Observe-se que a variação de uma casa decimal num número se traduz na adição algébrica de uma unidade ao seu logaritmo na base 10:

$$\log 170 = \log 10 + \log 17 = 1 + \log 17; \qquad \log 1{,}7 = -1 + \log 17$$

Ilustra-se em seguida o método utilizado por Briggs para o cálculo de $\log 2$ (1624).

Calcule-se $\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{10}}} = 10^{\frac{1}{2^{54}}}$.

Pondo $c = \frac{1}{2^{54}}$, tem-se $10^c = 1{,}00000000000000012781914932003235 = 1 + a$

Calcule-se $\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2^{54}}}$; tem-se

$2^c = 1{,}00000000000000003847739796558310 = 1 + b$

O valor procurado é x tal que $10^x = 2$.

Então, $1 + b = 2^c = \left(10^c\right)^x = (1 + a)^x \approx 1 + ax \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ e assim,

$$\log 2 \approx 0{,}3010299956638812$$