# Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

## Ficha de Trabalho de Matemática

**Ano Lectivo 2004/05** ***As três primeiras proposições do Livro I dos Elementos de Euclides*** **10.º Ano**

| Nome: ______________________________ | N.º: ___ | Turma: ___ |
|---|---|---|

## Euclides (séc. III a.C.)

Nascido na Síria e tendo estudado em Atenas (seus pais eram gregos), Euclides granjeou enorme prestígio pela forma brilhante como ensinava Geometria e Álgebra, na Escola de Alexandria, para onde foi convidado pelo próprio rei Ptolomeu, do Egipto.

Consta que, quando o rei pediu a Euclides que lhe indicasse um processo fácil de aprender Geometria, este lhe respondeu que "não há uma estrada real para a Geometria"...

Mas o nome de Euclides ficou na História da Ciência, para sempre associado à primeira concepção de Geometria como um conjunto sistematizado e lógico de propriedades. Muitas dessas propriedades eram já usadas anteriormente, de forma dispersa e com objectivos, tanto utilitários como de mero prazer intelectual ou artístico, por outras civilizações (babiónia, egípcia, chinesa); mas Euclides organizou-as de forma lógica e demonstrou-as, tomando como ponto de partida um conjunto reduzido de proposições que toma como verdadeiras sem necessitarem de demonstração e a que se chama *axiomas* ou *postulados*.

A sua obra *Elementos*, em 12 volumes, apresenta a Geometria com estrutura de ciência e a forma como recorre ao raciocínio dedutivo fez com que gerações após gerações a tenham estudado nas suas inúmeras traduções, até aos nossos dias. Por isso se diz que a obra de Euclides constitui dos maiores *best-sellers* de sempre, só sendo ultrapassada pela Bíblia.

Adaptado de INFINITO 10A, Areal Editores, Volume 1, pág. 64

## Elementos

Os matemáticos gregos da idade do ouro da Grécia (460 a.C - 430 a.C.) possuíam um sistema ordenado de geometria plana, em que o princípio da dedução lógica (*apagoge*), que permitia inferir uma afirmação a partir de outra, tinha sido inteiramente aceite. Era o início da axiomática, como é indicado pelo nome do livro supostamente escrito por Hipócrates, *Elementos (Stoicheia)*, que é o título de todos os tratados axiomáticos gregos, incluindo o de Euclides.

Segundo Proclo, os gregos antigos definiam os "elementos" de um estudo dedutivo como os teoremas-mestre, de uso geral e amplo no assunto. Euclides, no livro *Os Elementos*, tomou como base cinco axiomas e cinco postulados geométricos e tentou deduzir todas as suas quatrocentos e sessenta e cinco proposições dessas dez afirmações. Certamente um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação da forma postulacional de raciocínio.

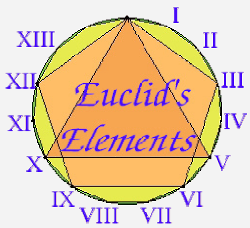
Nos *Elementos*, após as premissas iniciais aparecem as proposições divididas em dois tipos: os *problemas* e os *teoremas*. A proposição I.1 é precisamente um problema: **Sobre uma linha recta determinada, descrever um triângulo equilátero.**

# Trabalho

*Para nos apercebermos como Euclides organizou essas propriedades de forma lógica e as demonstrou, tomando como ponto de partida um conjunto reduzido de proposições que toma como verdadeiras sem necessitarem de demonstração, nada melhor que resolvermos os três primeiros problemas do Livro I.*

*Como textos de apoio, vamos considerar duas versões dos Elementos de Euclides:*

"Elementos de Euclides" - tradução portuguesa - edição de 1855
(http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html)




(http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html)

Consideraremos ainda uma versão reduzida destes dois documentos e, como ferramentas, material de desenho (papel, lápis, régua e compasso) ou um programa de geometria dinâmica (podendo apresentar a forma de exercício).

## *Problema 1 (I.1):*

**Sobre um segmento de recta [AB], construir um triângulo equilátero [ABC].**

**A.** Executa a seguinte construção:

| Construção |
|---|
| Considera um qualquer segmento de recta [AB] (**Just. 1**). |
| Constrói a circunferência de centro em A e que passa em B (**Just. 2**); constrói ainda a circunferência de centro em B e que passa em A (**Just. 3**). |
| Traça agora os segmentos de recta [CA] e [CB], desde o ponto C (onde as circunferências se intersectam) até aos pontos A e B, respectivamente (**Just. 4**). |
| O triângulo [ABC] assim encontrado é a solução do problema. |

**B.** Tenta agora demonstrar a proposição I.1.

**C.** Usando a versão reduzida dos dois documentos sobre os *Elementos* de Euclides, identifica as justificações assinaladas, preenchendo convenientemente a tabela apresentada em anexo.

## *Problema 2 (I.2)*:

**Dado um ponto A e um segmento de recta [BC], construir um ponto F tal que o segmento [AF] é congruente (geometricamente igual a) com [BC].**

**A.** Executa a seguinte construção:

| Construção |
|---|
| Traça o segmento [AB] (**Just. 1**) e sobre este segmento constrói o triângulo equilátero [ADB] (**Just. 2**). |
| Prolonga os segmentos [DA] e [DB] nas semi-rectas DA' e DB', respectivamente (**Just. 3**). |
| Com centro em B e passando por C constrói a circunferência c1 (**Just. 4**) e designa por E a sua intersecção com a semi-recta DB'. |
| Com centro em D e passando por E constrói a circunferência c2 (**Just. 5**) e designa por F a sua intersecção com a semi-recta DA'. |
| O ponto F assim encontrado é a solução do nosso problema. |

**B.** Tenta agora demonstrar a proposição I.2.

**C.** Usando a versão reduzida dos dois documentos sobre os *Elementos* de Euclides, identifica as justificações assinaladas, preenchendo convenientemente a tabela apresentada em anexo.

## *Problema 3 (I.3)*:

**Dada uma semi-recta AB e um segmento de recta [CD], construir um ponto E na semi-recta AB de modo que os segmentos [AE] e [CD] sejam congruentes.**

**A.** Executa a seguinte construção:

| Construção |
|---|
| Constrói o segmento [AF'], colocado em A e congruente com [CD] (**Just. 1**). |
| Constrói a circunferência c3, com centro em A e raio [AF'] (**Just. 2**). |
| O ponto E, intersecção de c3 com o segmento [AB], é o ponto desejado. |

**B.** Tenta agora demonstrar a proposição I.3.

**C.** Usando a versão reduzida dos dois documentos sobre os *Elementos* de Euclides, identifica as justificações assinaladas, preenchendo convenientemente a tabela apresentada em anexo.

Ao falarmos em construções com **régua não graduada e compasso** estamos a referir-nos aos três primeiros postulados dos *Elementos* de Euclides. Estes postulados são a base destas construções, muitas vezes designadas por construções euclidianas. Nos *Elementos* de Euclides não se menciona o compasso ou quaisquer outros instrumentos, Euclides simplesmente assume que linhas rectas podem ser construídas dados dois pontos, e que uma circunferência pode ser construída dado o seu centro e passando por um outro ponto. A régua não tem propriedades métricas e o compasso é de pontas "caídas" (contrariamente ao nosso "compasso moderno" que é de pontas fixas).

**Qual é a possibilidade assegurada por *Elementos* I.2?**

**FIM**