Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

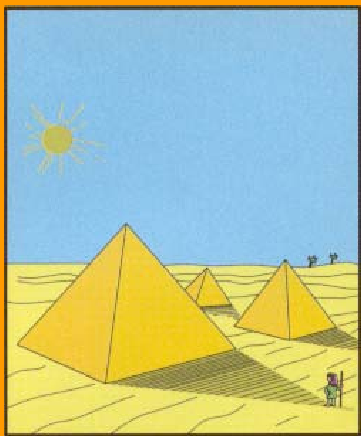
Ano Lectivo 2004/05 ***Tales de Mileto e as semelhanças*** **7.º Ano**

1.ª Parte

Tales de Mileto

A. Lê com atenção o texto seguinte:

Quando o sábio Tales de Mileto, cerca de seiscentos anos antes do nascimento de Cristo, se encontrava no Egipto, foi-lhe pedido por um mensageiro do faraó, em nome do soberano, que calculasse a altura da pirâmide de Quéops: corria a voz de que o sábio sabia medir a altura de construções elevadas por arte geométrica, sem ter de subir a elas. Tales apoiou-se a uma vara, esperou até ao momento em que, a meio da manhã, a sombra da vara, estando esta na vertical, tivesse um comprimento igual ao da própria vara. Disse então ao mensageiro: "Vá, mede depressa a sombra: o seu comprimento é igual à altura da pirâmide".



Para ser rigoroso, Tales deveria ter dito para adicionar à sombra da pirâmide metade do lado da base desta, porque a pirâmide tem uma base larga, que rouba uma parte da sombra que teria se tivesse a forma de um pau direito e fino; pode acontecer que o tenha dito, ainda que a lenda o não refira, talvez para não estragar, com demasiados pormenores técnicos, uma resposta que era bela na sua simplicidade.

Radice, L. L. (1971)
A Matemática de Pitágoras a Newton
Extraído de Matemática 7, Areal Editores, pág. 82

Para perceberes melhor esta referência histórica, explora a animação indicada a seguir.

Animação A

B. *Tales apoiou-se a uma vara, esperou até ao momento em que, a meio da manhã, a sombra da vara, estando esta na vertical, tivesse um comprimento igual ao da própria vara. Disse então ao mensageiro: "Vá, mede depressa a sombra: o seu comprimento é igual à altura da pirâmide".*

Concordas com a afirmação de Tales? Porquê?
Se tens dificuldade em responder, aceita esta sugestão:

Sugestão 1

C. *Para ser rigoroso, Tales deveria ter dito para adicionar à sombra da pirâmide metade do lado da base desta, porque a pirâmide tem uma base larga, que rouba uma parte da sombra que teria se tivesse a forma de um pau direito e fino.*

Com a ajuda de um desenho, explica a razão desta observação feita pelo autor do texto.
Tenta mais um pouco, antes de veres a sugestão.

Sugestão 2

Segundo esta referência histórica, Tales ter-se-ia limitado a aguardar um momento em que os objectos projectam sombras iguais às suas alturas. Este modo de proceder sugere certos conhecimentos acerca de triângulos isósceles, nomeadamente a proposição: **se dois ângulos internos dum triângulo forem iguais então o triângulo é isósceles**.

Quais são os ângulos que Tales sabia serem iguais? Justifica.

2.ª Parte

Figuras semelhantes

D. Segundo esta referência histórica, ainda que Tales se tenha limitado a aguardar um momento em que os objectos projectam sombras iguais às suas alturas, está subjacente o conceito matemático de **semelhança** entre duas ou mais figuras. Mas, em Matemática, dizer que duas figuras são **semelhantes** não é a mesma coisa que dizer que elas são **parecidas**.

Observa as figuras. Indica as que te parecem semelhantes.

Exercício D

Solução D

Duas figuras F_1 e F_2 têm a mesma forma, ou são semelhantes, se são geometricamente iguais ou uma é uma ampliação da outra.

3.ª Parte

Polígonos semelhantes

E. Na animação do exercício seguinte, estão representados dois polígonos semelhantes.
Compara os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos internos de cada um dos polígonos.

Exercício E

Dois polígonos são semelhantes se e só se:

1- As amplitudes dos seus ângulos correspondentes são iguais;

2- Os comprimentos dos seus lados correspondentes são directamente proporcionais.

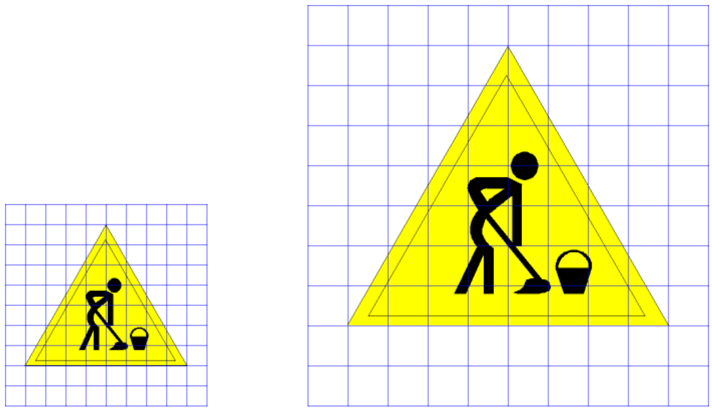
4.ª Parte

Processos de ampliação e redução de figuras

F. Podemos obter figuras semelhantes por vários processos. Vamos analisar três desses processos.

1.º Processo – Utilização de uma grelha

Este processo permite reproduzir uma figura de uma grelha para outra de tamanho diferente. Esta técnica é muito utilizada para aumentar ou diminuir padrões na estampagem de tecidos.

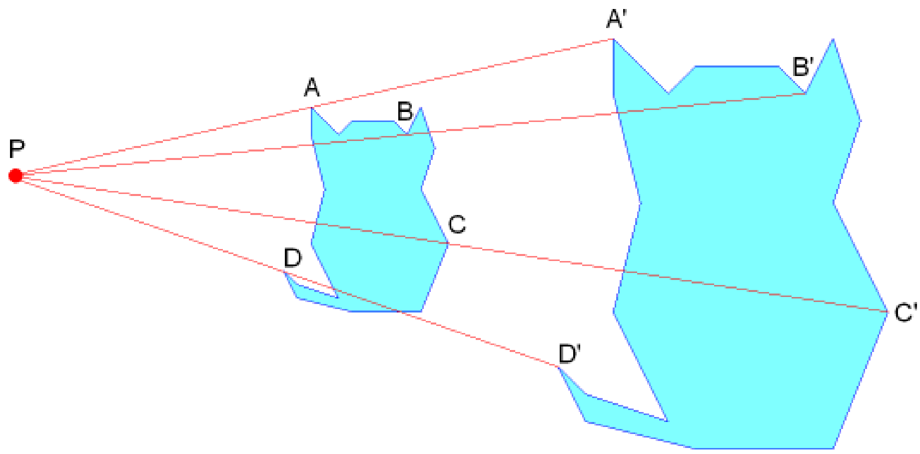


Obtenção de figuras semelhantes por utilização de grelhas de tamanhos diferentes

Exercício F1

2.º Processo – Utilização de um ponto auxiliar

Este processo permite desenhar uma figura semelhante a outra dada, recorrendo a um ponto auxiliar. Este processo corresponde a uma transformação geométrica chamada **homotetia**.



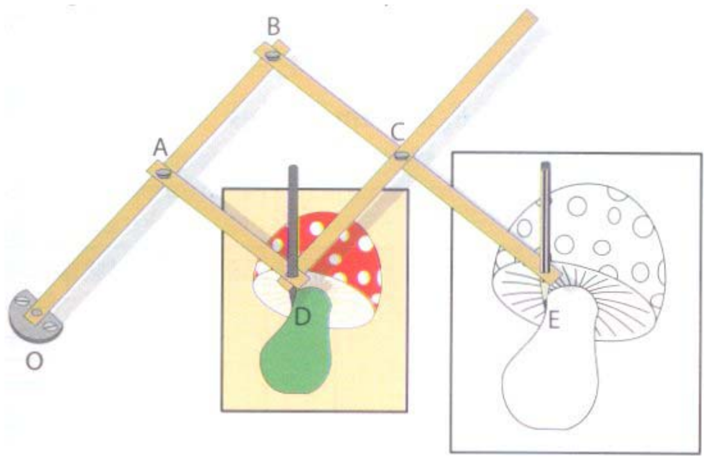
Obtenção de figuras semelhantes por utilização de um ponto auxiliar

Este processo já foi utilizado anteriormente. Vamos agora ver com maior pormenor.

Exercício F2

3.º Processo – Utilização do pantógrafo

Este instrumento permite desenhar figuras semelhantes a uma figura dada, por ampliação ou redução.



Obtenção de figuras semelhantes por utilização de um pantógrafo

O Pantógrafo é um aparelho simples, constituído por quatro réguas articuladas, que estão fixadas entre si. Duas réguas estão por baixo e as restantes são colocadas sobre as outras duas.

O Pantógrafo é um instrumento, que é aplicado para ampliações e reduções de figuras, foi inventado em 1603 pelo jesuíta C. Schreiner.

Se se pretende uma ampliação, usa-se o Pantógrafo da seguinte maneira: fixa-se o ponto O e com um estilete em D, acompanha-se a figura inicial. Em E insere-se um lápis que vai registando (ampliando) os contornos feitos em D em torno da figura.

Quando se pretende uma redução, a utilização do pantógrafo faz-se ao contrário, a colocação do estilete é em E e a posição do lápis é em D.

Adaptado de http://www.mat.uc.pt/~bebiano/Atractor/panto.htm

Se pretenderes saber mais sobre o pantógrafo:

- http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/malice2/transf2.htm

Se pretenderes construir um pantógrafo:

- http://users.hubwest.com/hubert/mrscience/pantograph.html

Algumas animações sobre pantógrafos:

- http://www.ies.co.jp/math/java/geo/panta/panta.html
- http://centros5.pntic.mec.es/ies.marques.de.santillana/tallerma/pantog.htm
- http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/116ogg.htm

5.ª Parte

Triângulos semelhantes (e sua área) e Tales de Mileto

G. Vamos agora descobrir um critério de semelhança de triângulos.

O cálculo da altura da pirâmide

Há duas versões para este facto. Hicrônimos, discípulo de Aristóteles, diz que Tales mediu o comprimento da sombra da pirâmide no momento em que nossas sombras são iguais à nossa altura, assim medindo a altura da pirâmide. A de Plutarco diz que fincando uma vara vertical no extremo da sombra projectada pela pirâmide, construímos a sombra projectada da vara, formando no solo dois triângulos semelhantes.

Extraído de http://www.matematica.br/historia/calpiramide.html

A primeira versão, como já vimos, sugere certos conhecimentos acerca de triângulos isósceles, nomeadamente a proposição: **se dois ângulos internos dum triângulo forem iguais então o triângulo é isósceles**.

Exercício G

Solução G

Vamos descobrir seguidamente quando é que dois triângulos são semelhantes.
Já vimos que:

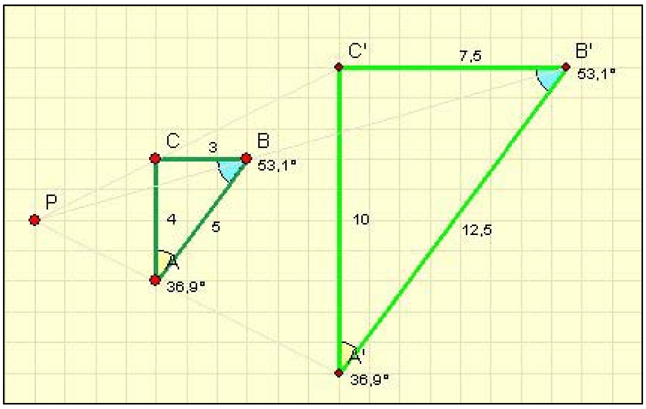
Dois polígonos são semelhantes se e só se:

1- As amplitudes dos seus ângulos correspondentes são iguais;

2- Os comprimentos dos seus lados correspondentes são directamente proporcionais.

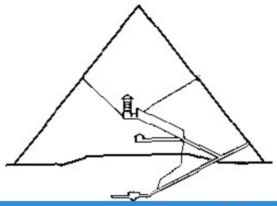
Construamos dois triângulos semelhantes.
Vamos agora tentar descobrir se existe algum critério que garanta a semelhança de triângulos:

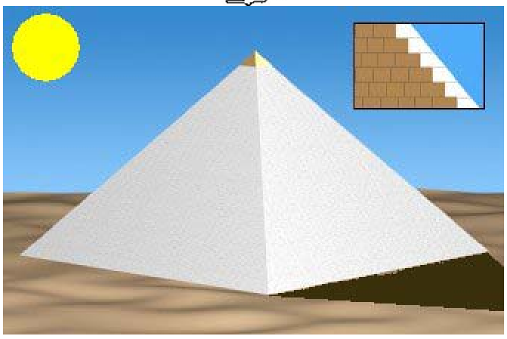
Animação G



Dois triângulos são semelhantes se e só se tiverem, de um para o outro, dois pares de ângulos geometricamente iguais.

H. Vamos agora considerar a segunda versão, a de Plutarco.
Imagina que Tales utilizou uma vara com 2 metros de comprimento, cuja sombra tinha 80 centímetros no momento em que as mediu. Qual terá sido o comprimento da sombra da pirâmide medida por Tales?





The 'great' pyramid itself is truly an astonishing work of engineering skill - for over four thousands years, until the modern era, it was the tallest building in the world. The sides are oriented to the four cardinal points of the compass and the length of each side at the base is 755 feet (230.4 m). They rise at an angle of 51 52' to a height , originally, of 481 feet (147 m) but nowadays 451 feet (138 m). It was constructed using around 2,300,000 limestone blocks, weighing, on average, 2.5 tons each.

http://www.eyelid.co.uk/pyramid3.htm

I. Um dado triângulo tem 4 cm^2 de área.
Qual é a área de uma sua ampliação, com razão de semelhança 2? E com razão de semelhança 3?
Qual é a área de uma sua redução, com razão se semelhança 0,5?

Porque provavelmente a tua resposta está errada, explora a seguinte animação, corrige as tuas respostas e explica por que razão a área varia desta forma.

Animação I

6.ª Parte

A distância de um navio à costa

J. Também é atribuído a Tales um processo de medir a distância de um navio à costa, usando a semelhança de triângulos. Usando a tua imaginação, descreve uma possível maneira de efectuar tais cálculos e ilustra-a com alguns desenhos.

L. Lê estes textos sobre Tales de Mileto:

- http://www.matematica.br/historia/tales.html
- http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm105/tales.htm

FIM